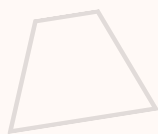


$$K(x) = 4x^2 + 4x + 240$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$



Optymalizacja

Bezpłatne notatki i zadania maturalne

$$P_{ABCD} = P_{ABFE} + P_{EFCD}$$

POZIOM PODSTAWOWY

Zgodnie z nową formułą 2023

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



*Konkursy i nagrody na
naszym Discordzie!*

www.tumatura.pl

Spis treści

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

- 1 O nas, projekt TuMatura** str 3
- 2 Wymogi CKE** str 4
- 3 Optymalizacja** str 5-15
 - Optymalizacja- jak to ugryźć? str 5-8
 - Przykłady zadań maturalnych str 9-15

Psss... sprawdź resztę naszych notatek na stronie TuMatura.pl

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE - ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.



Obniżamy koszt przygotowania się do matury w Polsce

Czytasz notatki stworzone przez **Fundację Kanał Studencki** w ramach projektu **Tumatura**.

Jeśli uważasz nasze materiały za wartościowe – **weź udział w anonimowym badaniu** i pomóż nam zmierzyć, ile kosztuje przygotowanie się do zdania matury w Polsce.

Anonimowa ankieta

Ile kosztuje przygotowanie się do matury w Polsce?

Odpowiedz



Korzystasz z wersji wydrukowanej?
Zeskanuj kod QR i weź udział w badaniu!

Przejrzysta teoria

Studenckie typy i rady

Zadania maturalne

Wytłumaczone karty wzorów



CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE



STUDENCKI TIP OD OLI

Zastanów się, co już umiesz, a co jeszcze wymaga przećwiczenia. Warto zaglądać tu raz na jakiś czas – wtedy lepiej widzisz postęp!

UCZEŃ...

- 1  rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

OPTIMALIZACJA

Wzory i własności

NAZWA

WZÓR

WZÓR NA
WSPÓŁRZĘDNE
WIERZCHOŁKA
PARABOLI

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Mało wzorów, widzisz?
Optymalizacja to przede
wszystkim praktyka!



1

Optymalizacja- jak to ugryźć

CZYM JEST OPTYMALIZACJA?

W zadaniach optymalizacyjnych, jak już podpowiada nam nazwa, będziemy optymalizować nasze rozwiązanie.

Optymalizować - «poszukiwać **najlepszego rozwiązania** według wybranego **kryterium**, z uwzględnieniem określonych **ograniczeń**.»

Najczęściej optymalizujemy:

- pole,
- objętość,
- koszt/zysk,
- czas.

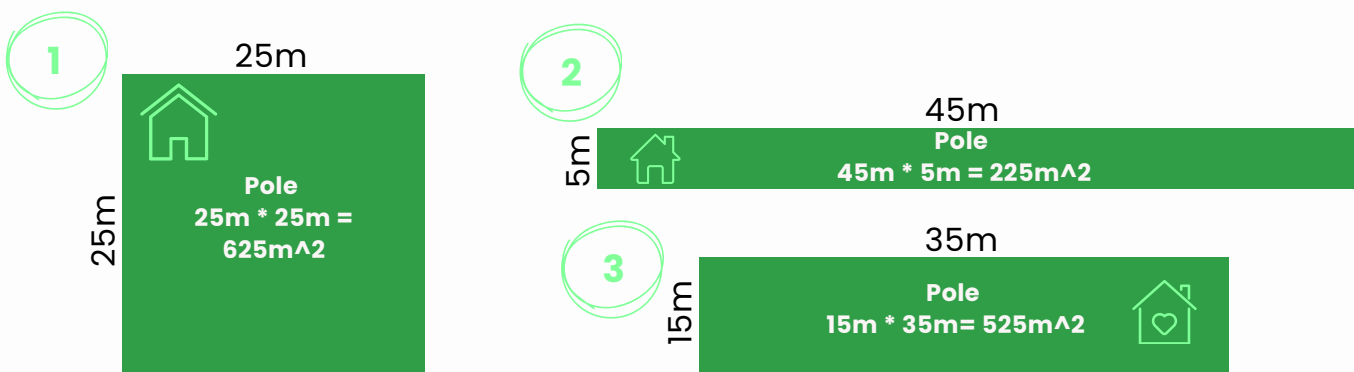
Na maturze, najlepszym rozwiązaniem będzie to największe, bądź najmniejsze.

- Wyobraźmy sobie, że stoimy przed wyborem działki. Naszym priorytetem jest to, by miała ona jak największą powierzchnię, czyli **pole**.

...Kto by nie chciał dużej działki? :)

- Dziwnym trafem okazuje się, że dostajemy w prezencie 100 metrów ogrodzenia, którym możemy ją otoczyć. Jest to nasz **obwód**.

Na portalu aukcyjnym znajdujemy dostępne działki:



Spośród trzech powyższych działek, kierując się kryterium największej powierzchni działki, wybralibyśmy działkę numer 1.

A co jeśli istnieje inna działka, o tym samym obwodzie, która ma większe pole? **I jak ją znaleźć?** To właśnie na to pytanie odpowiemy, rozwiązując zadanie optymalizacyjne - jakie wymiary powinna mieć działka o obwodzie 100m, aby jej pole było największe?

1

Schemat rozwiązania

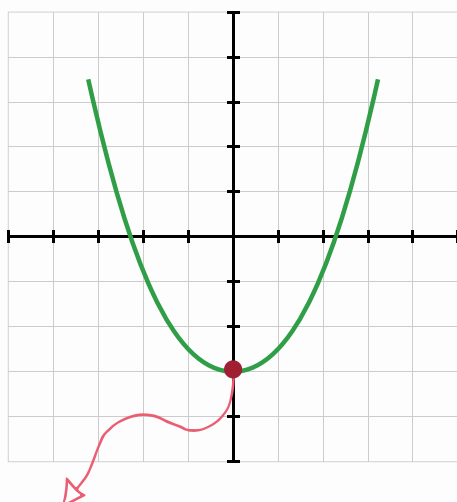
MECHANIZM ROZWIĄZYWANIE ZADANIA OPTIMALIZACYJNEGO

1. Oznaczamy niewiadomą. Wyznaczamy dziedzinę zgodną z treścią zadania.
2. Zapisujemy wzór funkcji, który opisuje szukaną wielkość.
3. Upraszczamy wzór do postaci funkcji kwadratowej z jedną niewiadomą.
4. Obliczamy **współrzedną wierzchołka**, bo to ona daje wartość największą lub najmniejszą.
5. Sprawdzamy, czy otrzymany wynik należy do dziedziny.
6. Gotowe!

Dlaczego to wierzchołek funkcji kwadratowej wyznacza naszą wartość ekstremalną (największą bądź najmniejszą)?

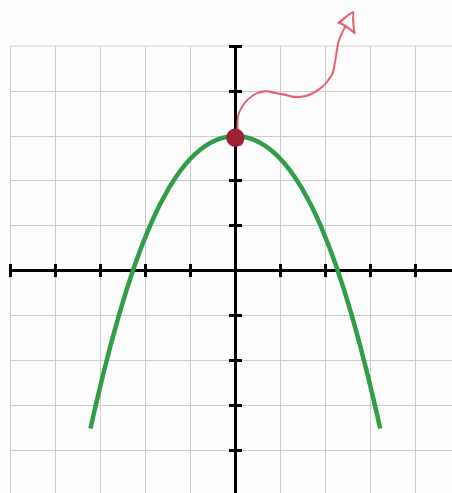


Wartość y w wierzchołku jest wartością największego możliwego pola.



Gdy współczynnik a jest większy od 0 (ramiona skierowane do góry), funkcja w wierzchołku osiąga **najniższą** wartość.

Gdy współczynnik a jest mniejszy od 0 (ramiona skierowane do dołu), funkcja w wierzchołku osiąga **najwyższą** wartość.



Wartość y w wierzchołku jest wartością najmniejszego możliwego pola.

1

Optymalizacja- jak to ugryźć

PRZĘCZYMYS TO!

Suma dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych x oraz y jest równa 12. Wyznacz x oraz y , dla których wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$ jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość.

1. Oznaczamy niewiadomą i dziedzinę.

Suma dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych x oraz y jest równa 12. Wyznacz x oraz y , dla których wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$ jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość.

x - pierwsza poszukiwana liczba, $x \geq 0, x \in \mathbb{R}$

y - druga poszukiwana liczba, $y \geq 0, y \in \mathbb{R}$

2. Zapisujemy wzór funkcji, który opisuje szukaną wielkość.

Suma dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych x oraz y jest równa 12. Wyznacz x oraz y , dla których wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$ jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość.

(I) $x + y = 12$, więc $y = 12 - x$

(II) $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

TEGO SZUKAMY!

3. Upraszczamy wzór do postaci funkcji kwadratowej z jedną niewiadomą.

(III) Podstawiamy!

$$f(x) = 2x^2 + (12 - x)^2$$

$$f(x) = 2x^2 + 144 - 24x + x^2$$

$$f(x) = 3x^2 - 24x + 144$$

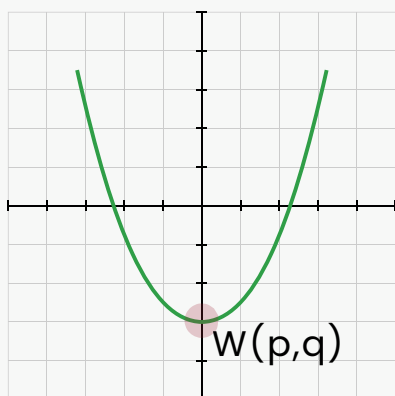
1

Optymalizacja- jak to ugryźć

PRZĘCZYM TO!

Suma dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych x oraz y jest równa 12. Wyznacz x oraz y , dla których wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$ jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość.

4. Obliczamy współrzędną wierzchołka, bo to ona daje wartość największą lub najmniejszą.



wyznaczona funkcja
 $f(x) = 3x^2 - 24x + 144$

$a = 3$
 $a > 0$, więc ramiona skierowane są do góry

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{24}{6} = 4$$

$q = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow$ możemy też podstawić wyznaczone p do wzoru funkcji

$$f(4) = 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 144 = 48 - 96 + 144 = 96$$

ALE CO TO ZNACZY??

p - współrzędna x wierzchołka.

Jest to pierwsza szukana liczba.

q - współrzędna y wierzchołka.

Jest to minimalna wartość funkcji.

WIĘC!

$$x = 4 \quad y = 12 - 4 = 8$$

Minimalna wartość $2x^2 + y^2$ to 96.

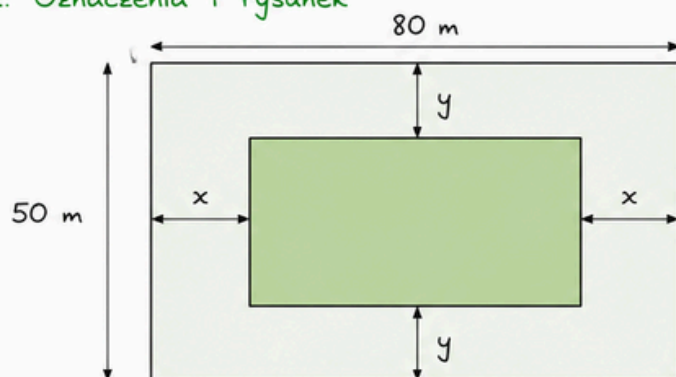
PRZYKŁAD 4: DLA CIEBIE

Boisko w kształcie prostokąta ma wymiary 80 m × 50 m. Chcemy wyznaczyć na nim prostokątny ogród kwiatowy w taki sposób, że wszystkie cztery boki ogrodu są równoległe do boków boiska, a ogród znajduje się w środku boiska. Odległości ogrodu od boków boiska wynoszą odpowiednio x wzdłuż dłuższego boku i y wzdłuż krótszego boku.

Suma odsunięć od boków boiska wynosi 20 m.

Wyznacz największą możliwą powierzchnię ogrodu i oblicz ją.

1. Oznaczenia i rysunek



Suma odsunięć:

$$2x + 2y = 20$$

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x$$

2. Pole ogrodu jako funkcja jednej zmiennej

Wymiary ogrodu:

szerokość: $80 - 2x$

wysokość: $50 - 2y = 50 - 2(10 - x) = 30 + 2x$

Pole:

$$P(x) = (80 - 2x)(30 + 2x)$$

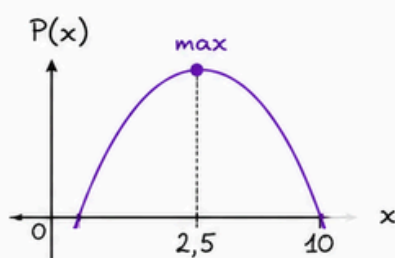
$$P(x) = -4x^2 + 20x + 2400 \quad \leftarrow \text{funkcja kwadratowa (ramiona w dół)}$$

3. Wierzchołek paraboli

$$\text{Dla } P(x) = ax^2 + bx + c, \quad x_w = -\frac{b}{2a}$$

$$a = -4, \quad b = 20$$

$$x_w = -\frac{20}{2 \cdot (-4)} = \frac{20}{8} = 2,5$$



4. Wymiary optymalne

$$x = 2,5$$

$$y = 10 - x = 7,5$$

Wymiary ogrodu:
75 m × 35 m

5. Pole maksymalne

$$P_{\max} = P(2,5) = (80 - 2 \cdot 2,5) \cdot (30 + 2 \cdot 2,5) = 75 \cdot 35 = \underline{\underline{2625 \text{ m}^2}}$$

Odpowiedź:

Największe pole ma ogród o wymiarach 75 m × 35 m.

Pole maksymalne wynosi

$$\underline{\underline{2625 \text{ m}^2}}.$$

Pamiętaj, że x i y to odsunięcia, więc aby otrzymać długości boków, musimy ich wartość odjąć od wymiarów boiska!

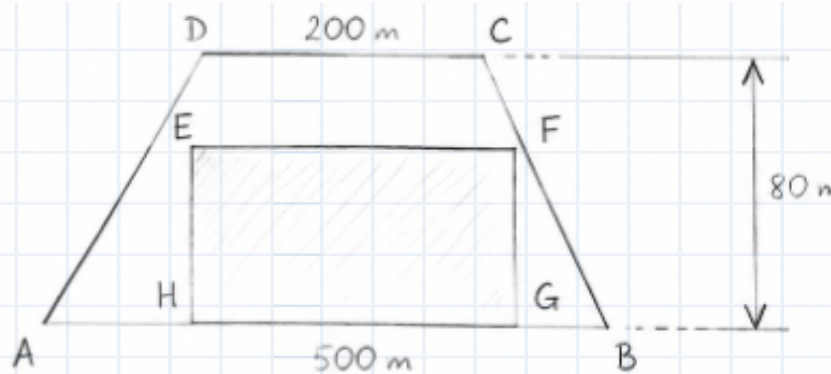
PRZYKŁAD 4: DLA CIEBIE

Działka budowlana ma kształt trapezu równoramiennego. Podstawy mają długości 500 m i 200 m, a wysokość trapezu wynosi 80 m.

Z działki planuje się wydzielić prostokątny teren pod budowę hali.

Dwa wierzchołki prostokąta mają należeć do dłuższej podstawy, dwa do ramion trapezu.

Jakie powinny być wymiary prostokąta, aby jego pole było największe? Oblicz to pole.



Zawsze rób rysunek,
będzie prościej!



PRZYKŁAD 5: DLA CIEBIE

Różnica dwóch liczb x i y jest równa 8 oraz $x, y > 0$. Wyrażenie W jest sumą podwojonej liczby y oraz potrojonego kwadratu liczby x zmniejszonej o jeden. Wyznacz x oraz y , dla których wartość wyrażenia W jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość.

PRZYKŁAD 6: DLA CIEBIE

Właściciel kawiarni przeanalizował liczbę klientów w ciągu pierwszych 20 dni po otwarciu.

Liczbę

$K(n)$ klientów w n -tym dniu opisuje funkcja:

$$K(n) = -n^2 + 16n + 120$$

gdzie n to liczba dni ($1 \leq n \leq 20$). Podaj, którego dnia było najwięcej klientów oraz ilu ich było.

PRZYKŁAD 7: DLA CIEBIE

Suma dwóch liczb x i z wynosi 7

Wyrażenie M to suma pięciokrotnej liczby z oraz potrojonego kwadratu liczby x zmniejszonego o 2.

Znajdź x i z , dla których M jest najmniejsze. Podaj wartość M .

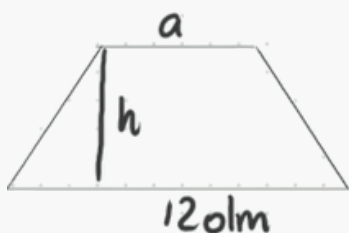
Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Zgodnie z założeniem architekta okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, który nie jest równoległobokiem. Dłuższa podstawa trapezu ma mieć długość 12 dm, a suma długości krótszej podstawy i wysokości tego trapezu ma być równa 18 dm.

Oblicz, jaką długość powinna mieć krótsza podstawa tego trapezu, tak aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole. Zapisz obliczenia.



① Wyznaczenie funkcji kwadratowej

$$a + h = 18$$
$$h = 18 - a$$

$$P(a) = \frac{1}{2}(12 + a)(18 - a)$$

② Wyznaczenie współrzędnych

$$a = p = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$$

$$P(3) = \frac{1}{2}(12 + 3)(18 - 3) = \underline{\underline{112,5}}$$

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)



Zadanie 2.

Działka ma kształt trapezu. Podstawy AB i CD tego trapezu mają długości $|AB| = 400$ m oraz $|CD| = 100$ m. Wysokość trapezu jest równa 75 m, a jego kąty DAB i ABC są ostre.

Z działki postanowiono wydzielić plac w kształcie prostokąta z przeznaczeniem na parking.

Dwa z wierzchołków tego prostokąta mają leżeć na podstawie AB tego trapezu, a dwa pozostałe – E oraz F – na ramionach AD i BC trapezu (zobacz rysunek).



Wyznacz długości boków prostokąta, dla których powierzchnia wydzielonego placu będzie największa. Wyznacz tę największą powierzchnię. Zapisz obliczenia.

Wskazówka:

Aby powiązać ze sobą wymiary prostokąta, skorzystaj z tego, że pole trapezu $ABCD$ jest sumą pól trapezów $ABFE$ oraz $EFCD$:

$$P_{ABCD} = P_{ABFE} + P_{EFCD}$$

① Utworzenie Funkcji kwadratowej

$$\begin{aligned} \frac{100+400}{2} \cdot 75 &= \frac{400+y}{2} \cdot x + \frac{100+y}{2} \cdot (75-x) \\ 200x + \frac{1}{2}xy + 50(75-x) + y(75-x) &= \\ &= y = 400 - 4x \\ x(400 - 4x) &= 400x - 4x^2 \end{aligned}$$

② Wyznaczenie wierzchołka

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-400}{-8} = 50$$

$$y = 400 - 4x = 200$$

$$\begin{array}{l} x = 50 \quad y = 200 \\ \hline \text{największy plac} \end{array}$$

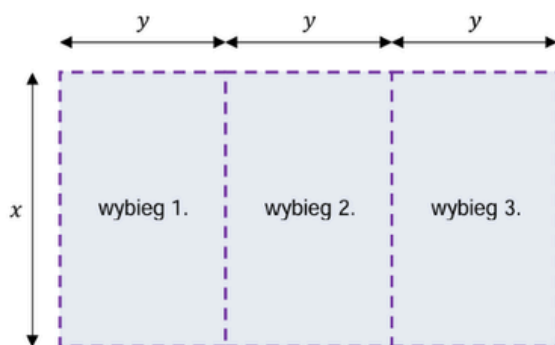
Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 3.

W schronisku dla zwierząt, na płaskiej powierzchni, należy zbudować ogrodzenie z siatki wydzielające trzy identyczne wybiegi o wspólnych ścianach wewnętrznych. Podstawą każdego z tych trzech wybiegów jest prostokąt (jak pokazano na rysunku). Do wykonania tego ogrodzenia należy zużyć 36 metrów bieżących siatki.

Schematyczny rysunek trzech wybiegów (widok z góry).
Linia przerywaną zaznaczono siatkę.



Oblicz wymiary x oraz y jednego wybiegu, przy których suma pól podstaw tych trzech wybiegów będzie największa. W obliczeniach pominij szerokość wejścia na każdy z wybiegów. Zapisz obliczenia.

① Utworzenie funkcji

$$4x + 6y = 36$$
$$y = 6 - \frac{2}{3}x$$

$$3xy = 3x\left(6 - \frac{2}{3}x\right) = 18x - 2x^2$$

② Dziedzina

$$6 - \frac{2}{3}x \Rightarrow x < 9 \quad x > 0$$
$$y > 0$$

③ Wierchołek i wartości

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{-4} = \underline{4,5}$$

$$y = 6 - \frac{2}{3} \cdot 4,5 = \underline{3}$$

suma pól jest największa
dla $x = 4,5$
 $y = 3$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

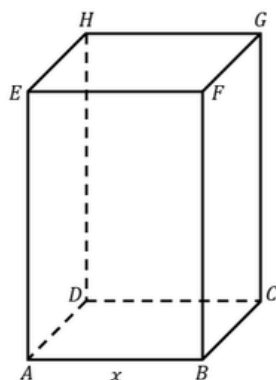
Materiały możesz
też wydrukować



Zadanie 1.

Rozważamy wszystkie prostopadłościany $ABCDEFGH$, w których krawędź AE jest 3 razy dłuższa od krawędzi AB , a suma długości wszystkich dwunastu krawędzi prostopadłościanu jest równa 48 (zobacz rysunek).

Niech $P(x)$ oznacza funkcję pola powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB .



Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji P . Oblicz długość x krawędzi AB tego z rozważanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest największe. Zapisz obliczenia.

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



Zadanie 2.

Zakład stolarski produkuje krzesła, które sprzedaje po 196 złotych za sztukę. Właściciel, na podstawie analizy rzeczywistych wpływów i wydatków, stwierdził, że:

- przychód P (w złotych) ze sprzedaży x krzesel można opisać funkcją $P(x) = 196x$
- koszt K (w złotych) produkcji x krzesel dziennie można opisać funkcją

$$K(x) = 4x^2 + 4x + 240$$

Dziennie w zakładzie można wyprodukować co najwyżej 30 krzesel.

Oblicz, ile krzesel powinien dziennie sprzedawać zakład, aby zysk ze sprzedaży krzesel wyprodukowanych przez ten zakład w ciągu jednego dnia był możliwie największy. Oblicz ten największy zysk.

Zapisz obliczenia.

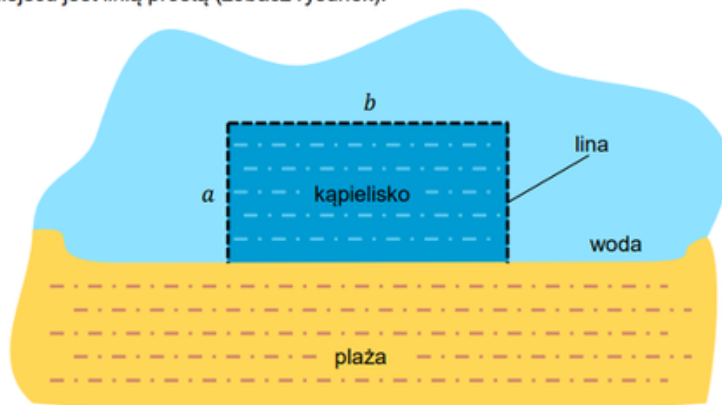
Wskazówka: przyjmij, że zysk jest różnicą przychodu i kosztów.

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



Zadanie 3.

Do wyznaczenia trzech boków pewnego kąpieliska w kształcie prostokąta należy użyć liny o długości 200 m. Czwarty bok tego kąpieliska będzie pokrywał się z brzegiem plaży, który w tym miejscu jest linią prostą (zobacz rysunek).



Oblicz wymiary a i b kąpieliska tak, aby jego powierzchnia była największa.



Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



Kanał Stuencki

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



Zadanie 4.

Rodzinną firmą stolarską produkuje małe wiatraki ogrodowe. Na podstawie analizy rzeczywistych wpływów i wydatków stwierdzono, że:

- przychód P (w złotych) z tygodniowej sprzedaży x wiatraków można opisać funkcją $P(x) = 251x$
- koszt K (w złotych) produkcji x wiatraków w ciągu jednego tygodnia można określić funkcją $K(x) = x^2 + 21x + 170$.

Tygodniowo w zakładzie można wyprodukować co najwyżej 150 wiatraków.

Oblicz, ile tygodniowo wiatraków należy sprzedać, aby zysk zakładu w ciągu jednego tygodnia był największy. Oblicz ten największy zysk.

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że zysk jest różnicą przychodu i kosztów.

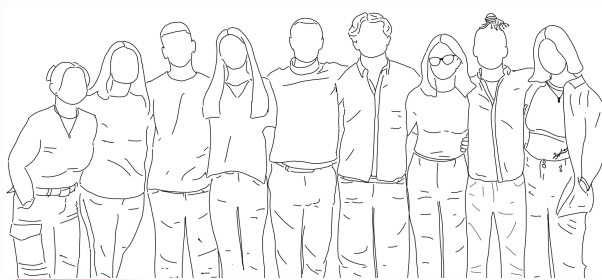
wspieramy *pro* STUDENTCKU



praktyka



nauka



przedsię
biorczość



inicjatywa

Dziękujemy za wspólną naukę. Mamy nadzieję,
że zdobywanie wiedzy było dla Ciebie
przyjemne. Do zobaczenia na studiach!

Powodzenia!

ŚLEDŹ DALEJ!



www.tumatura.pl



@tuMATURA



@tumatura

Wydane przez Fundację Kanał Studencki.
Wszelkie prawa zastrzeżone.



I DOŁĄCZ DO
STUDENCKIEJ
SPOŁECZNOŚCI!



@kanalstudencki



@kanal.studencki



www.kanalstudencki.pl



kontakt@kanalstudencki.pl