

Kombinatoryka i statystyka

Bezpłatne notatki
i zadania maturalne

POZIOM PODSTAWOWY

Zgodnie z nową formułą 2023



*Konkursy i nagrody na
naszym Discordzie!*

www.tumatura.pl

Spis treści

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

1	O nas, projekt <u>TuMatura</u>	<i>str 3</i>
2	Wymogi CKE	<i>str 4</i>
3	Kombinatoryka i statystyka	<i>str 5-27</i>
	Karta wzorów	<i>str 5-11</i>
	Kombinatoryka	<i>str 12-15</i>
	Rachunek prawdopodobieństwa	<i>str 16-18</i>
	Statystyka	<i>str 19-21</i>
	Przykłady zadań maturalnych	<i>str 22-27</i>

Psss... sprawdź resztę naszych notatek na stronie TuMatura.pl

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE – ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.



Obniżamy koszt przygotowania się do matury w Polsce

Czytasz notatki stworzone przez **Fundację Kanał Studencki** w ramach projektu **Tumatura**.

Jeśli uważasz nasze materiały za wartościowe – **weź udział w anonimowym badaniu** i pomóż nam zmierzyć, ile kosztuje przygotowanie się do zdania matury w Polsce.

Anonimowa ankieta

Ile kosztuje przygotowanie się do matury w Polsce?

Odpowiedz



Korzystasz z wersji wydrukowanej?
Zeskanuj kod QR i weź udział w badaniu!

Przejrzysta teoria

Studenckie typy i rady

Zadania maturalne

Wytłumaczone karty wzorów



CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE



STUDENCKI TIP OD OLI

Zastanów się, co już umiesz, a co jeszcze wymaga przećwiczenia.
Warto zaglądać tu raz na jakiś czas – wtedy lepiej widzisz postęp!

UCZEŃ...

- 1 ☐ **Zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;**
- 2 ☐ **oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;**
- 3 ☐ **oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę;**
- 4 ☐ **zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:**
 - ☒ **obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,**
 - ☒ **obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.**

Wzory i własności

NAZWA	WZÓR
KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIENSTWA	$a_1 \cdot a_2 = -1$
WSPÓŁRZĘDNE ŚRODKA ODCINKA	$a_1 \cdot a_2 = -1$
ŚREDNIA ARYTMETYCZNA	$a_1 \cdot a_2 = -1$ $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$
ŚREDNIA WAŻONA	$a_1 \cdot a_2 = -1$ $\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$
MEDIANA	$a_1 \cdot a_2 = -1$ – dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środek) – dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$ (średnia arytmetyczna z dwóch wyrazów ciągu)
DOMINANTA	$a_1 \cdot a_2 = -1$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Permutacje

Liczba wszystkich sposobów, na które n różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.



- Kombinacje

Liczba wszystkich sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k elementów ($0 \leq k \leq n$), jest równa $\binom{n}{k}$.

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k (niekoniecznie różnych) wyrazów, jest równa n^k .

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k różnych wyrazów ($1 \leq k \leq n$), jest równa

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Własności prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie niepustym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, natomiast P – prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach zbioru Ω . Wtedy:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \text{ oraz } B \text{ takich, że } A \subset B \subset \Omega$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{gdzie } A' \text{ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{dla każdego zdarzenia } A, B \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad \text{dla każdego zdarzenia } A, B \subset \Omega$$

- Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech Ω będzie niepustym skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A jest równe:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$



gdzie $|A|$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A , natomiast $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω .

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Schemat Bernoullego

Próba Bernoullego nazywamy doświadczenie losowe, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Jeden z nich nazywamy sukcesem, a drugi – porażką. Jeżeli prawdopodobieństwo sukcesu jest równe p , to prawdopodobieństwo porażki jest równe $q = 1 - p$.

Schematem Bernoullego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń prób Bernoullego. W schemacie Bernoullego prawdopodobieństwo $P_n(k)$ uzyskania w n próbach dokładnie k sukcesów ($0 \leq k \leq n$) jest równe:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

- Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω , przy czym $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zdarzenia A pod warunkiem zaistnienia zdarzenia B nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \dots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \dots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$

to dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ prawdziwa jest równość:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Twierdzenie Bayesa

Jeżeli zdarzenia losowe $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \dots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$
4. $P(A) > 0$

to dla każdego k ($1 \leq k \leq n$) prawdziwa jest równość:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

- Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Niech X będzie zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, określoną na zbiorze Ω , przy czym $P(\{\omega: \omega \in \Omega \text{ oraz } X(\omega) = x_i\}) = p_i$ dla $1 \leq i \leq n$. Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna $\bar{a}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$



- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna $\bar{g}$ z liczb nieujemnych $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa:

$$\bar{g} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- Średnia kwadratowa

Średnia kwadratowa $\bar{k}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa:

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n}}$$

- Nierówności między średnimi liczbowymi

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą liczbami nieujemnymi. Wtedy (przy powyższych oznaczeniach) prawdziwe są nierówności:

$$\bar{k} \geq \bar{a} \geq \bar{g}$$

Ponadto równość pomiędzy tymi średnimi liczbowymi zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Średnia ważona

Średnia ważona $\bar{s}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio: $w_1, w_2, \dots, w_n$, jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$



- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest:

– dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

– dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$ (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)



- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja σ^2 danych liczbowych $a_1, a_2, \dots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ jest równa:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}$$

Prawdziwa jest też równość:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}}$$

1

Kombinatoryka

CZYM ZAJMUJE SIĘ KOMBINATORYKA?

Kombinatoryka to dział matematyki zajmujący się liczeniem i analizą różnych sposobów wyboru i układu elementów w zbiorach skończonych. Obejmuje zagadnienia takie jak permutacje, kombinacje i wariacje, które pozwalają określić liczbę możliwych konfiguracji przy różnych warunkach.

KILKA PODSTAWOWYCH DEFINICJI

Silnia ($n!$) to iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n

Permutacja– to sposób ustawienia wszystkich elementów w określonej kolejności.

Wariacja z powtórzeniami– to uporządkowany wybór k elementów ze zbioru n elementowego, w którym można wybierać ten sam element wielokrotnie.

Wariacja bez powtórzeń– to uporządkowany wybór k elementów ze zbioru n , gdzie każdy element można wybrać tylko raz.

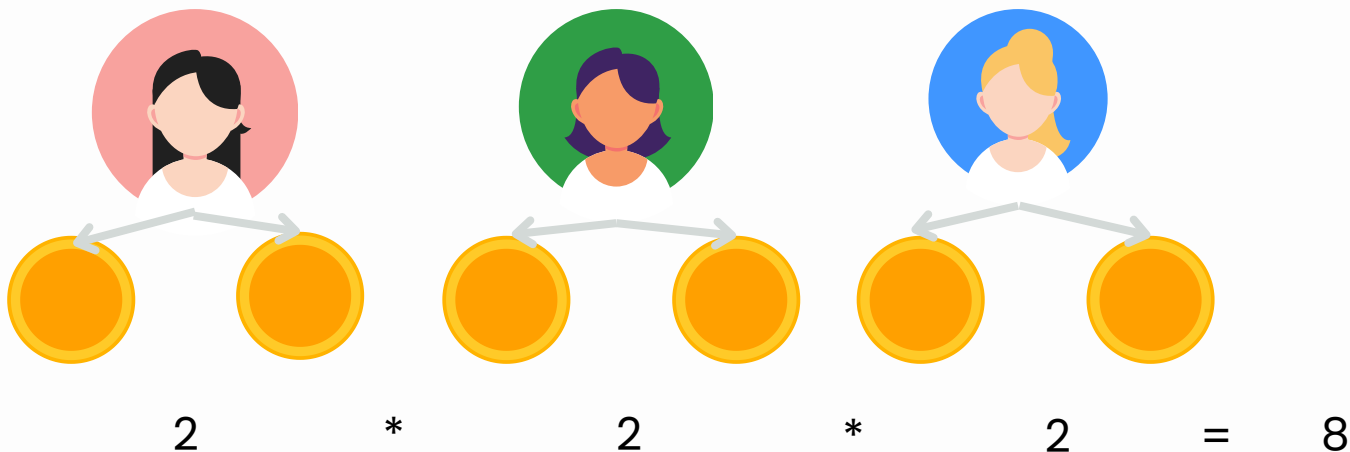
REGUŁA MNOŻENIA

Reguła mnożenia pomaga obliczyć liczbę możliwych wyników. Najlepiej wyjaśnić to na prostym przykładzie.

PRZYKŁAD 1

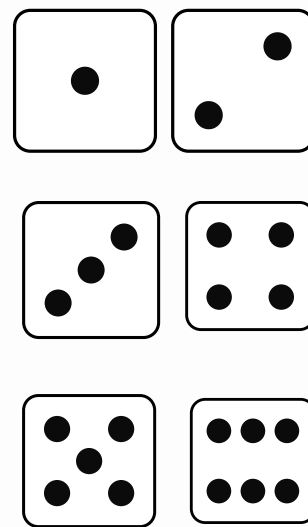
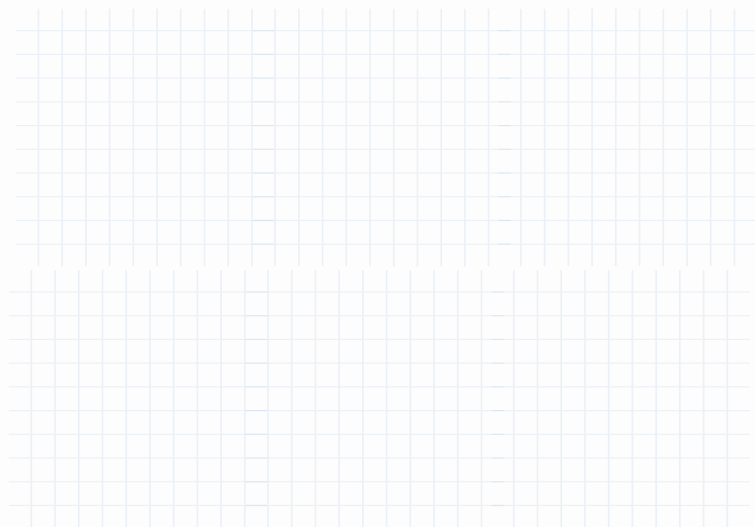
Wyobraź sobie, że 3 razy rzucamy monetą, ile jest możliwych wyników jakie wypadną.

Wyobraźmy sobie trzy osoby: Anię, Basię i Kasię. Każda reprezentuje jeden rzut monetą. Każda z nich może wyrzucić orła albo reszkę. Reguła mnożenia polega na tym pomiędzy "rundami" dajemy mnożenie



PRZYKŁAD 2: DLA CIEBIE

Oblicz ile jest możliwych kombinacji dwukrotnego rzutu kostką.



PERMUTACJA I SILNIA

PRZYKŁAD 3

Wyobraź sobie rząd ludzi ustawionych w kolejkę. Na ile sposobów ci uczniowie mogą się ustawić?

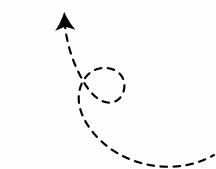
$$3 * 2 * 1$$

$$= 3! = 6$$

1 Na początku mamy do wyboru osobę a,b lub c. Mamy więc trzy możliwości

2 Jedna osoba już została wybrana, teraz wybór pozostaje spośród dwóch osób.

3 Została jedna osoba, więc nasz wybór ograniczony jest to tej jednej.



Czyli jest 6
możliwych ustawień



Tym właśnie jest Permutacja, jest to możliwości ustawień elementów jakiegoś zbioru. Oznaczamy ją jako $n!$, gdzie n to jest liczebność tego zbioru.

Przy okazji już wiesz czym jest silnia, polega ona na mnożeniu kolejnych liczb naturalnych od 1 do n . np.

$$4! = 4*3*2*1$$

$$5! = 5*4*3*2*1$$

$$10! = 10*9*8*7*6*5*4*3*2*1$$

PRZYKŁAD 4

Na ile sposobów można uszeregować cyfry od 1 do 3 oraz litery od a ,b Tak, aby litery rozdzielały cyfry, a żadna cyfra nie może być obok siebie?

$$\boxed{3} * \boxed{2} * \boxed{2} * \boxed{1} * \boxed{1} = 12$$

Możliwości:

1,2,3

a, b

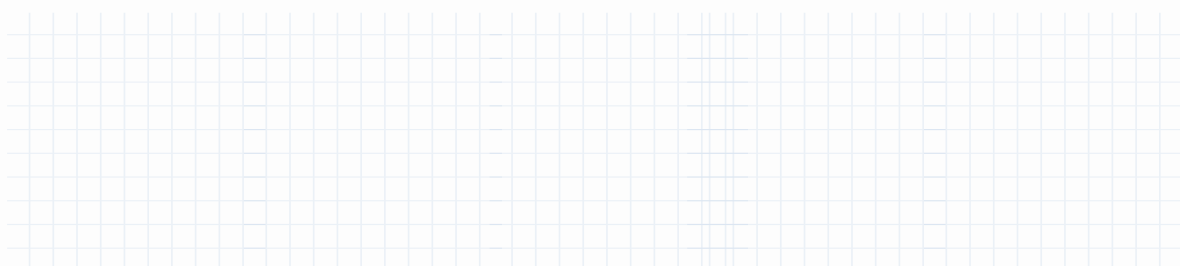
1,2
lub
2,3
lub
1,3

a
lub
b

1
lub
2
lub
3

PRZYKŁAD 5: DLA CIEBIE

Na ile sposobów można uszeregować trzy dziewczyny i dwóch chłopaków. Tak, aby żadna z dziewczyn nie stała obok innej dziewczyny?



PRZYKŁAD 6: DLA CIEBIE

Oblicz:

a) $2!$

b) $5!$

c) $6! + 2!$

d) $4! - 2!$

Przed chwilą nie rozważaliśmy możliwości powtarzania się elementów.
Teraz jednak może się tak stać.

PRZYKŁAD 7

Ile jest dodatnich, parzystych liczb czterocyfrowych ?

$$\begin{array}{ccccccc}
 \boxed{9} & * & \boxed{10} & * & \boxed{10} & * & \boxed{5} & = & 4500 \\
 \begin{array}{l} 1,2,3,4,5, \\ 6,7,8,9 \end{array} & & \begin{array}{l} 0,1,2,3,4, \\ 5,6,7,8, \\ 9 \end{array} & & \begin{array}{l} 0,1,2,3,4, \\ 5,6,7,8, \\ 9 \end{array} & & 0,2,4,6,8
 \end{array}$$

PRZYKŁAD 8

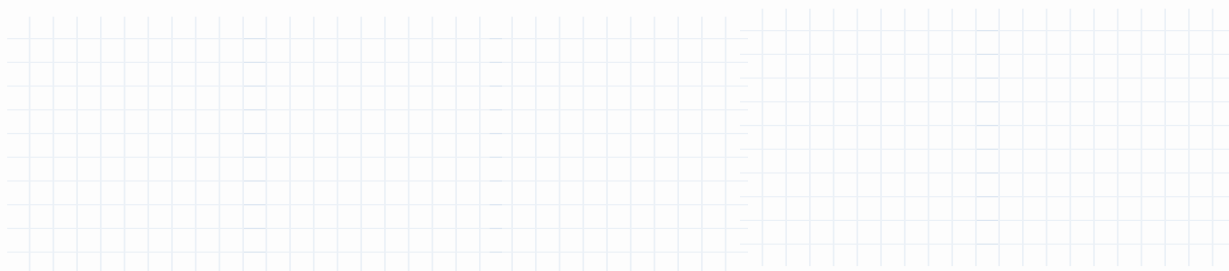
Ile jest możliwości utworzenia 5-znakowego hasła, które składa się wyłącznie z niepowtarzających się cyfr?

$$\begin{array}{ccccccc}
 \boxed{10} & * & \boxed{9} & * & \boxed{8} & * & \boxed{7} & * & \boxed{6} & = & 30240 \\
 \begin{array}{l} 0,1,2,3,4, \\ 5,6,7,8, \\ 9 \end{array} & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Przykład 7 przedstawia wariacje z powtórzeniami a przykład 8 wariacje bez powtórzeń.

PRZYKŁAD 9: DLA CIEBIE

Oblicz różnicę między liczbą możliwych 4-znakowych haseł cyfrowych (w których cyfry mogą się powtarzać), a liczbą 3-znakowych haseł cyfrowych (w których cyfry nie mogą się powtarzać).



CZYM ZAJMUJE SIĘ RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA?

Rachunek prawdopodobieństwa to dział matematyki, który zajmuje się analizą zdarzeń losowych. Pomaga przewidywać szanse wystąpienia różnych sytuacji, np. wygranej na loterii czy wylosowania konkretnej karty z talii. Kluczowe pojęcia to zdarzenie losowe, prawdopodobieństwo.

KILKA PODSTAWOWYCH DEFINICJI

Doświadczenie losowe – to proces, którego wynik jest nieprzewidywalny, ale wszystkie możliwe wyniki są znane (np. rzut monetą, rzut kostką).

Zdarzenie elementarne – to możliwy wynik doświadczenia losowego, np. przy rzucie monetą może to być „orzeł” lub „reszka”.

Zdarzenie losowe (A) – to dowolny podzbiór przestrzeni wszystkich zdarzeń elementarnych, który może wystąpić w wyniku doświadczenia losowego (np. wyrzucenie liczby parzystej na kostce).

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych (Ω) – to zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego, np. dla rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

CZYM JEST PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Jest to miara tego, jak bardzo prawdopodobne jest wystąpienie danego zdarzenia losowego. Można je wyrazić jako liczbę od 0 do 1, gdzie:

- 0 oznacza, że zdarzenie na pewno się nie wydarzy,
- 1 oznacza, że zdarzenie na pewno się wydarzy

Przedstawiamy to jako ułamek, gdzie:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \frac{\text{Liczba sposobów, aby coś się wydarzyło}}{\text{Liczba wszystkich możliwych wyników}}$$

PRZYKŁAD 1

Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek, przy rzucie kostką.

1. Wypisujemy zawartość zbioru A i zawartość zbioru Ω

$A = \{2, 4, 6\} \rightarrow$ kiedy liczba oczek będzie parzysta
 $|A| = 3 \rightarrow$ moc zbioru, czyli liczba jego elementów

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ wszystkie możliwości
 $|\Omega| = 6 \rightarrow$ moc zbioru

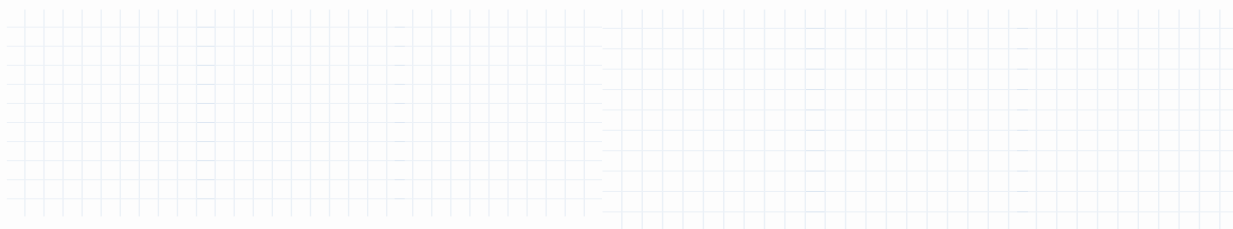
2. Podstawiamy liczby do ułamka.

$$P(A) = 3/6 = 1/2$$

Odp. Prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek wynosi $1/2$

PRZYKŁAD 2: DLA CIEBIE

Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek podzielnej przez 3 i jednocześnie podzielnych przez 2 przy rzucie kostką?



PRZYKŁAD 3

Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania trzech takich samych cyfr przy trzykrotnym rzucie kostką?

1. Wypisujemy zawartość zbioru A i zawartość zbioru Ω

$A = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)\}$
 $|A| = 6$

$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \rightarrow$ wykorzystaj wiedzę z tematu kombinatoryka
 $|\Omega| = 216 \rightarrow$ moc zbioru

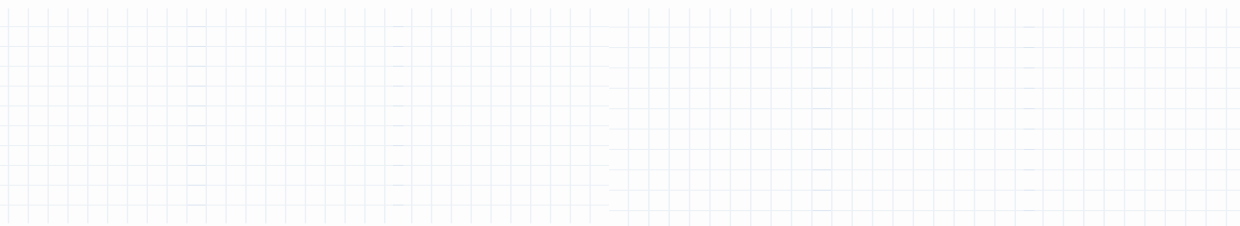
2. Podstawiamy liczby do ułamka.

$$P(A) = 6/216 = 1/36$$

Odp. Prawdopodobieństwo wynosi $1/36$

PRZYKŁAD 4: DLA CIEBIE

W koszyku znajdują się 3 czerwone, 2 zielone i 5 niebieskich kul. Losujesz jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujesz kulę czerwoną?



PRZYKŁAD 5:

W pudełku znajduje się 3 białe, 5 zielonych i 2 czerwone kulki. Losujesz 2 kulki ze zwracaniem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujesz najpierw jedną białą i później jedną zieloną kulkę?

1. Prawdopodobieństwo
wylosowania białej kulki

$$|A1| = 3$$
$$|\Omega| = 10$$

$$P(A1) = 3/10$$

2. Prawdopodobieństwo
wylosowania zielonej kulki

$$|A2| = 5$$
$$|\Omega| = 10$$

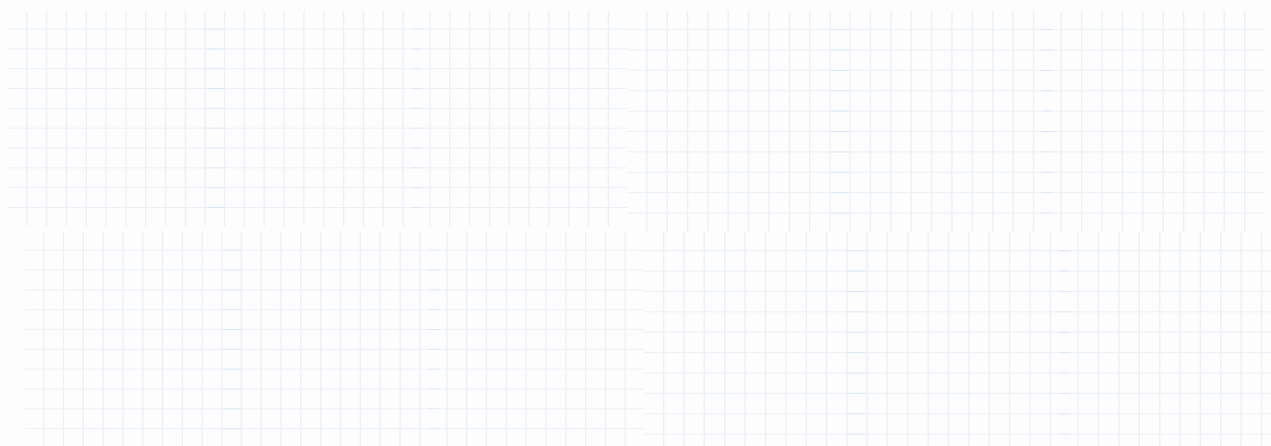
$$P(A2) = 5/10$$

3. Mnożymy prawdopodobieństwa

$$P(A1) \cdot P(A2) = (3/10) \cdot (5/10) = 15/100 = 3/20$$

PRZYKŁAD 6: DLA CIEBIE

W urnie znajdują się 4 białe, 5 czarnych i 3 niebieskie kulki. Losujesz 3 razy, bez zwracania, po jednej kulce. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane kulki będą białe?





CZYM ZAJMUJE SIĘ STATYSTYKA?

Statystyka to dział matematyki zajmujący się analizą danych. Na maturze obejmuje podstawowe pojęcia, takie jak średnia, mediana, dominanta.

PODSTAWOWE DEFINICJE

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

- to suma wszystkich liczb podzielona przez ich liczbę.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

MEDIANA

- to środkowa wartość w zbiorze liczb, gdy są one uporządkowane od najmniejszej do największej.
- Jeśli jest ich nieparzysta liczba, mediana to środkowa liczba.
- Jeśli jest ich parzysta liczba, mediana to średnia dwóch środkowych liczb

ŚREDNIA WAŻONA

- to średnia, w której różnym liczbom przypisuje się różne wagi.
- Zamiast traktować wszystkie liczby równo, większą wagę mają liczby ważniejsze.

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

DOMINANTA

- to liczba, która występuje najczęściej w zbiorze.
- Może być jedna, kilka lub żadna, jeśli żadna liczba się nie powtarza.

PRZYKŁAD 1

Jest dany pewien zbiór liczb $\{5, 8, 0, 2, 6, 6, 12, 1\}$

a) oblicz średnią arytmetyczną zbioru
 $x = (5+8+0+2+6+6+12+1) / 8 = 40/8 = 5$

b) podaj medianę zbioru

1. Szeregujemy rosnąco zbiór

0, 1, 2, 5, 6, 6, 8, 12

Środkiem tego zbioru jest 5 i 6 dlatego liczymy z nich średnią.
 $(5+6)/2 = 5.5 \rightarrow$ mediana wynosi 5,5

c) podaj dominantę zbioru

Widzimy, że w podanym zbiorze jedynym elementem, który się powtarza jest 6 i to jest dominanta tego zbioru.

PRZYKŁAD 2

Oblicz średnią arytmetyczną ocen, średnią ważoną ocen.

Student	Waga	Ocena
a	6	5
b	4	5
c	3	3
d	2	5
e	3	4
f	1	2

1. Średnia arytmetyczna

$$x = 24/6 = 4$$

2. Średnia ważona

$$x = (6*5 + 4*5 + 3*3 + 2*5 + 3*4 + 1*2)/19 = \\ (30+20+9+10+12+2)/19 = 4,37$$



Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



Kanał Stuencki

PRZYKŁAD 3: DLA CIEBIE

Jest dany pewien zbiór liczb $\{1, 5, 6, 10, 8, 6, 13, 12\}$

a) oblicz średnią arytmetyczną zbioru

b) podaj medianę zbioru

c) podaj dominantę zbioru

PRZYKŁAD 4: DLA CIEBIE

Uzupełnij tabelę

Typ	Sprawdzian	Kartkówka	Odpowiedź ustna	Średnia ważona ucznia
Waga	4	2	1	
Ania	6	5	4	
Basia	4	5	6	
Cyprian	3	2	5	
Średnia arytmetyczna ocen				

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą nieparzystą, jest równe

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{3}{4}$

$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & \times & \checkmark & \times & \checkmark & \times & \checkmark & 3 \\ 2 & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & 6 \\ 3 & \times & \checkmark & \times & \checkmark & \times & \checkmark & 3 \\ 4 & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & 6 \\ 5 & \times & \checkmark & \times & \checkmark & \times & \checkmark & 3 \\ 6 & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & 6 \\ \hline & & & & & & & 27 \end{Bmatrix}$

$\Omega = 6 \cdot 6 = 36$

$P(A) = \frac{27}{36} = \left(\frac{3}{4}\right)$

Zadanie 2.

Ze zbioru ośmiu kolejnych liczb naturalnych – od 1 do 8 – losujemy kolejno bez zwracania dwa razy po jednej liczbie.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest dzielnikiem liczby 8.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A . Zapisz obliczenia.

$A = \left\{ \begin{matrix} 1,7 \\ 7,1 \\ 2,6 \\ 6,2 \\ 3,5 \\ 5,3 \end{matrix} \right\}$

$|\Omega| = 8 \cdot 7 = 56$

$|A| = 6$

$P(A) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 3.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych nieparzystych, w których zapisie dziesiętnym występują wyłącznie cyfry 0, 1, 2, 3 (np. 12303, 11111), jest

A. 32

B. 384

C. 512

D. 576


$$\begin{array}{ccccccc} 3 & \cdot & 4 & \cdot & 4 & \cdot & 4 & \cdot & 2 & = & 384 \\ \uparrow & & & & & & & & & & \\ 1, 2 \text{ lub } 3 & & & & & & & & 1 \text{ lub } 3 & & \end{array}$$

Zadanie 4.

Dane są dwa zbiory: $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oraz $D = \{7, 8, 9, 10\}$.

Losujemy jedną liczbę ze zbioru C , a następnie losujemy jedną liczbę ze zbioru D .

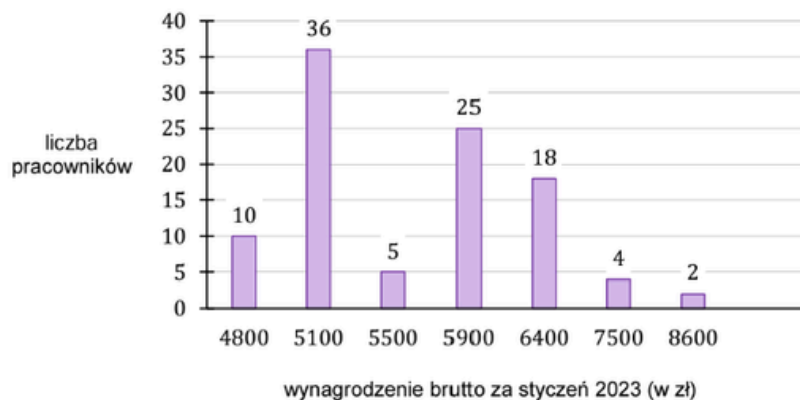
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosujemy liczby, których iloczyn będzie podzielny przez 4. Zapisz obliczenia.


$$\begin{array}{ccccccc} A = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & \times & \times & \times & \vee & \times & \times & 1 \\ 8 & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & 6 \\ 9 & \times & \times & \times & \vee & \times & \times & 1 \\ 10 & \times & \vee & \times & \vee & \times & \vee & 3 \\ & & & & & & & |A| = 11 \end{array}$$
$$| \Omega | = 6 \cdot 4 = 24$$
$$P(A) = \frac{11}{24}$$

Przykłady zadań maturalnych

Zadanie 5.

Na diagramie przedstawiono rozkład wynagrodzenia brutto wszystkich stu pracowników pewnej firmy za styczeń 2023 roku.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

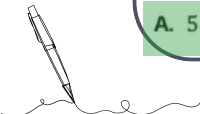
Średnia wynagrodzenia brutto wszystkich pracowników tej firmy za styczeń 2023 roku jest równa

A. 5 690 zł

B. 5 280 zł

C. 6 257 zł

D. 5 900 zł


$$\begin{aligned} &4800 \cdot 10 + 5100 \cdot 36 + 5500 \cdot 5 + 5900 \cdot 25 + \\ &6400 \cdot 18 + 7500 \cdot 4 + 8600 \cdot 2 = \\ &= 569\,000 : 100 = \underline{\underline{5690}} \end{aligned}$$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



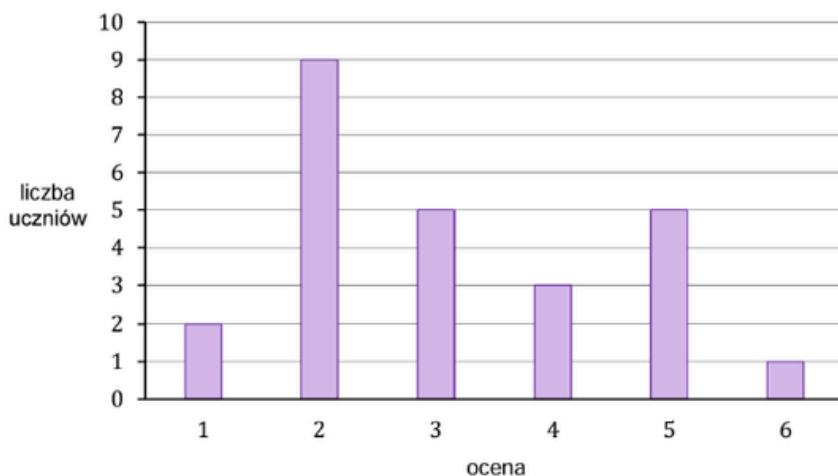
Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
też wydrukować



Zadanie 1.

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej. Na osi poziomej podano oceny, które uzyskali uczniowie tej klasy, a na osi pionowej podano liczbę uczniów, którzy otrzymali daną ocenę.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnia arytmetyczna ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa

A. 3

B. 3,12

C. 3,5

D. 4,1(6)

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



Zadanie 2.

Dane są dwa zbiory: $C = \{0, 4, 5, 7, 9\}$ oraz $D = \{1, 2, 3\}$.
Losujemy jedną liczbę ze zbioru C , a następnie losujemy jedną liczbę ze zbioru D .

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie większa od 9. Zapisz obliczenia.



Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



[TuMatura](#)



[Kanał Stuencki](#)



Zadanie 3.

W tabeli zestawiono liczbę punktów uzyskanych przez 32 uczniów pewnej klasy za rozwiązanie jednego z zadań testu z matematyki.

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5
Liczba uczniów	2	2	5	6	11	6

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskanych za rozwiązanie tego zadania przez uczniów tej klasy jest równa

A. 2,5

B. 3,25

C. 3,31

D. 4

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

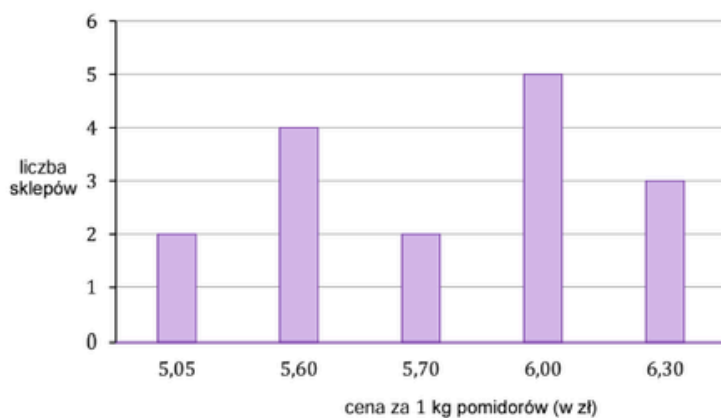
Zadanie 4.

Ze zbioru ośmiu liczb $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 15. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5.

Na diagramie poniżej przedstawiono ceny pomidorów w szesnastu wybranych sklepach.



Uzupełnij tabelę. Wpisz w każdą pustą komórkę tabeli właściwą odpowiedź, wybraną spośród oznaczonych literami A–E.

29.1.	Mediana ceny kilograma pomidorów w tych wybranych sklepach jest równa	
29.2.	Średnia cena kilograma pomidorów w tych wybranych sklepach jest równa	

A. 5,80 zł B. 5,73 zł C. 5,85 zł D. 6,00 zł E. 5,70 zł

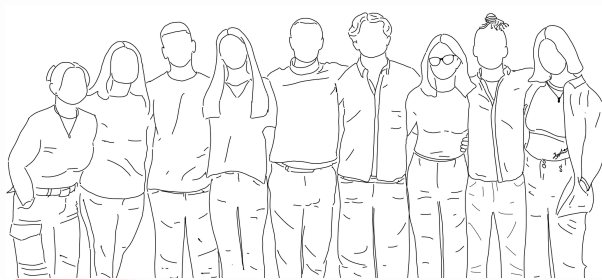
wspieramy *pro* STUDENTCKU



praktyka



nauka



przedsię
biorczość



inicjatywa

Dziękujemy za wspólną naukę. Mamy nadzieję,
że zdobywanie wiedzy było dla Ciebie
przyjemne. Do zobaczenia na studiach!

Powodzenia!

ŚLEDŹ DALEJ!



www.tumatura.pl



@tuMATURA



@tumatura

Wydane przez Fundację Kanał Studencki.
Wszelkie prawa zastrzeżone.



I DOŁĄCZ DO
STUDENCKIEJ
SPOŁECZNOŚCI!



@kanalstudencki



@kanal.studencki



www.kanalstudencki.pl



kontakt@kanalstudencki.pl

Fundacja Kanał Studencki prezentuje

MATEMATYKA PODSTAWOWA

Zdaj maturę razem ze
studenckim podręcznikiem!

MATURA 2025

TEORIA
PRZYKŁADY
ZADANIA
STUDENCKIE TIPY
I WSKAZÓWKI
MATURALNE



MATERIAŁ Z NOTATEK
MOŻESZ OBEJRZEĆ
TAKŻE NA YOUTUBE!
@TUMATURA

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

- **3** HEJ, TO MY!
- **5** CZYM JEST TU.MATURA?
- **6** RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I STATYSTYKA

Available

COMING SOON

LICZBY RZECZYWISTE
WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE
RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI
FUNKCJE
CIĄGI
TRYGONOMETRIA
PLANIMETRIA
GEOMETRIA ANALITYCZNA
STEREOMETRIA
RACHUNEK
PRAWDOPODOBIENSTWA I
STATYSTYKA

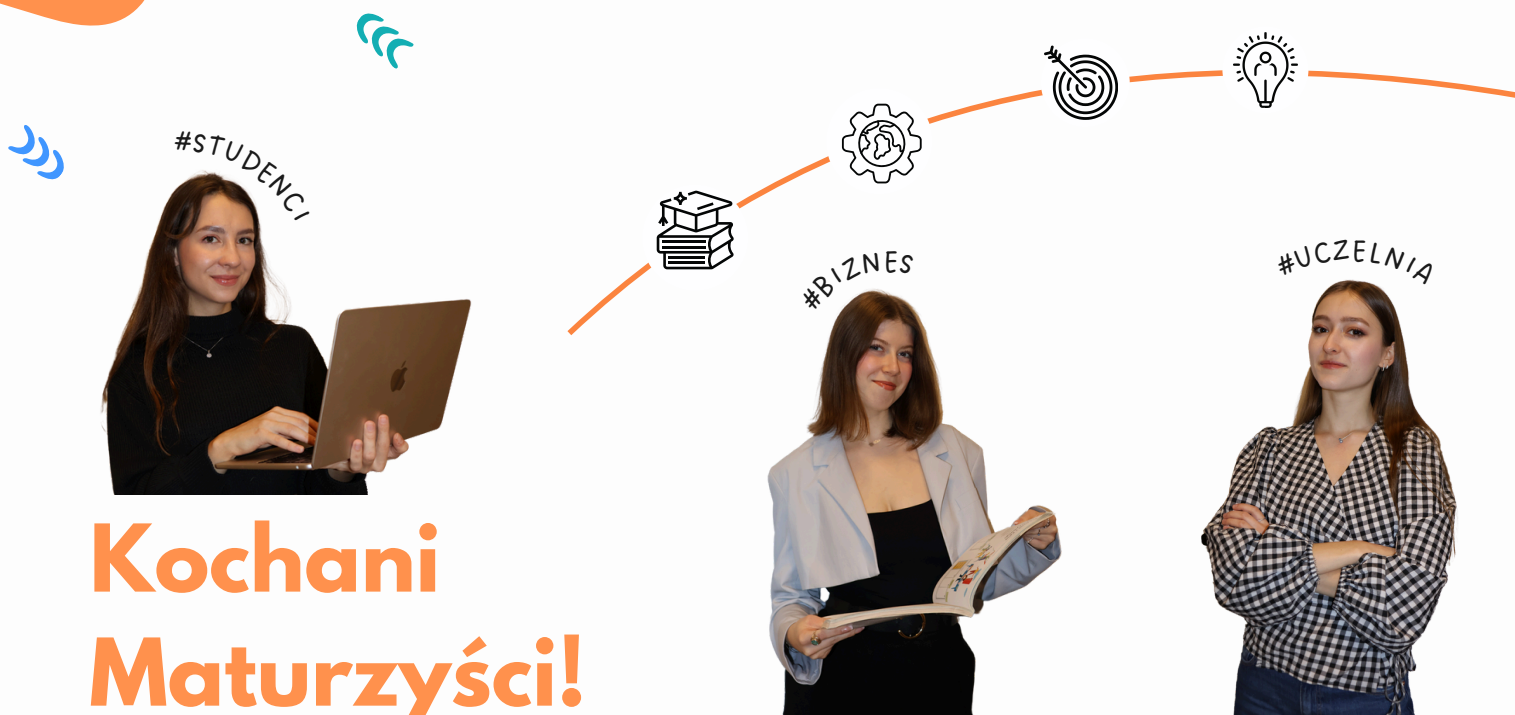
OPTYMALIZACJA

Opracowanie merytoryczne: Emilia Nagłowska, Natalia Król

Korekta: Natalia Król

Oprawa graficzna i skład: Aleksandra Benowska

Fundacja, która łączy świat
studentów, biznesu i uczelni



Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

**POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE - ROZWIJAMY
SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.**

Fundacja Kanał Studencki



Ola



Martyna



Natalia



Kaja

Wolontariuszka



Emilia



Czym jest tuMATURA?

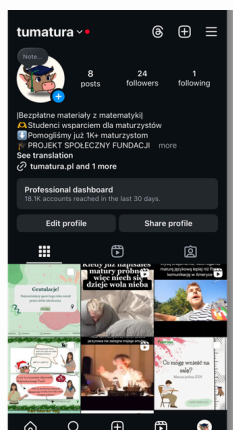
To projekt społeczny Fundacji Kanał Studencki wyrównujący szanse maturzystów w Polsce!



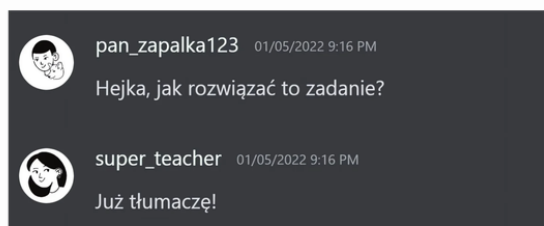
UCZ SIĘ Z NASZYM
FILMAMI NA YOUTUBE!
@TUMATURA



MATERIAŁY DO NAUKI -
WYDRUKUJ LUB
ROZWIĄDUJ NA TABLECIE!



MATURALNE TIPY NA
INSTAGRAMIE
(PS. I ŚMIESZNE MEMY)
@TUMATURA



ZADAWAJ PYTANIA I
UCZ SIĘ Z INNYMI NA
DISCORDZIE



10 Statystyka

