

$$y = \log_b x$$

$$a+b=b+a$$

Wrażenia algebraiczne

$$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$$

Bezpłatne notatki
i zadania maturalne

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

POZIOM PODSTAWOWY

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Zgodnie z nową formułą 2023



Konkursy i nagrody na
naszym Discordzie!

www.tumatura.pl

Spis treści

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

1 O nas, projekt TuMatura *str 3*

2 Wymogi CKE *str 4*

3 Wyrażenia algebraiczne *str 5-31*

Wzory skróconego mnożenia *str 5-13*

Usuwanie niewymierności z mianownika *str 14-19*

Wylączanie współczynnika przed nawias *str 20-24*

Dowody algebraiczne; podzielność liczb *str 25-31*

Psss... sprawdź resztę naszych notatek na stronie TuMatura.pl

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE - ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.



Obniżamy koszt przygotowania się do matury w Polsce

Czytasz notatki stworzone przez **Fundację Kanał Studencki** w ramach projektu **Tumatura**.

Jeśli uważasz nasze materiały za wartościowe – **weź udział w anonimowym badaniu** i pomóż nam zmierzyć, ile kosztuje przygotowanie się do zdania matury w Polsce.

Anonimowa ankieta

Ile kosztuje przygotowanie się do matury w Polsce?

Odpowiedz



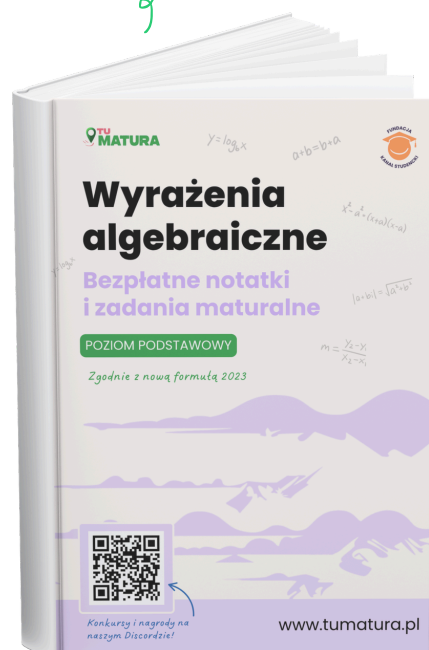
Korzystasz z wersji wydrukowanej?
Zeskanuj kod QR i weź udział w badaniu!

Przejrzysta teoria

Studenckie typy i rady

Zadania maturalne

Wytłumaczone karty wzorów



CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE



STUDENCKI TIP OD OLI

Zastanów się, co już umiesz, a co jeszcze wymaga przećwiczenia.
Warto zaglądać tu raz na jakiś czas - wtedy łatwiej widać progres!

UCZEŃ...

- 1 ☐ **Stosuje wzory skróconego mnożenia na:**
 $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$
- 2 ☐ **Dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany**
jednej i wielu zmiennych
- 3 ☐ **Wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej**
- 4 ☐ **Rozkłada wielomiany na czynniki**
metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias
oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie
trudniejszych niż rozkład wielomianu
 $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$
- 5 ☐ **Mnoży i dzieli wyrażenia wymierne**
- 6 ☐ **Dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne**
w przypadkach nie trudniejszych niż:
 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$



Wierzę w Ciebie!

1

Wzory skróconego mnożenia

DEFINICJA WZORÓW SKRÓCONEGO MNOŻENIA

DO CZEGO SIĘ PRZYDAJĄ?

- Pozwalają nam na **szybsze** obliczenia
- **Podstawowe narzędzie do kombinowania**



Dzięki czemu oszczędzimy CZAS. Na maturze zdecydowanie nam się przyda!

Przydadzą się do rozwiązywania zadań z pozostałych działów. To właśnie dzięki nim wykazesz m.in. większość dowodów algebraicznych.

Możemy wzory **rozwijać** i **zwijać** - zwijanie jest trochę trudniejsze, bo trzeba najpierw zauważyć, jaki to wzór. Ale spokojnie - wszystko wyjaśnimy:)

PRZYKŁAD 1. ROZWIJANIE WZORU

Po co mnożyć przez siebie nawiasy "na piechotę", jeśli możemy wykorzystać do tego wzory skróconego mnożenia!

I sposób - mnożę nawiasy "na piechotę", nie używam wzorów 😞

$$(2x + 3y)^2 = (2x + 3y) \cdot (2x + 3y) = 2x \cdot 2x + 2x \cdot 3y + 3y \cdot 2x + 3y \cdot 3y = 4x^2 + 6xy + 6xy + 9y^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

Licząc na piechotę jest więcej miejsca do popełnienia błędów - czego z pewnością nie chcemy



Skróćmy czas i umilmy matematykę, stosując nasze wzorki :)

II sposób - używam wzorów skróconego mnożenia 😊

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

Stosuję wzór, aby podnieść sumę do kwadratu

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Widzisz? Dzięki wzorom dochodzimy do tego samego, ale zdecydowanie szybciej!

PRZYKŁAD 2. ZWIJANIE WZORU

Kolejnym zastosowaniem jest zwijanie we wzor. Co to oznacza? Będziemy używać wzorów w drugą stronę – jedziemy pod prąd. Już tłumaczymy!

Naszym zadaniem jest zwinąć to wyrażenie we wzór skróconego mnożenia:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2$$

Widzę, że **x** i **y** są podniesione do kwadratu oraz mam ich iloczyn **xy**. Znaki "+" wskazują wzór na kwadrat sumy. **Muszę policzyć, co jest moim a i b.**

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &\boxed{4x^2} + \boxed{12xy} + \boxed{9y^2} \\ &(\boxed{a} + \boxed{b})^2 = \boxed{a^2} + \boxed{2ab} + \boxed{b^2} \end{aligned}$$

Pierwiastkuję to, co stoi przy x i y. Co podniesione do kwadratu da mi 4 a co 9? Pokażemy to krok po kroku, żebyś mógł to też powtórzyć na trudniejszym przykładzie.

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &\sqrt{4} = ? \text{ oraz } \sqrt{9} = ? \\ &?^2 = 4 \qquad ?^2 = 9 \\ &\boxed{2}^2 = 4 \qquad \boxed{3}^2 = 9 \end{aligned}$$

Warto sprawdzić czy zgadza się iloczyn:

$$\underline{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} = \boxed{12}$$

Gotowe! Wiemy już, że **a=2x** i **b=3y**.
Dobra robota!

$$(\boxed{2x} + \boxed{3y})^2$$

 Czas poznać wzory!



STUDENCKI TIP OD OLI

Przećwicz dobrze zwijanie i zauważanie wzorów. Na maturze często właśnie o tę umiejętność chodzi w zadaniach otwartych o rozwiązywanie równań wielomianowych, wymiernych, kwadratowych czy też w zadaniach na dowodzenie. Czy potrafisz też zwinąć kwadrat różnicy i różnicę kwadratów?

NAZWA

WZÓR

PRZYKŁAD

— KWADRAT SUMY

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a = 2x \quad b = 3y$$

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

— KWADRAT RÓŻNICY

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

— RÓŻNICA KWADRATÓW

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$$

— SZEŚCIAN SUMY

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(2x + 3y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 + (3y)^3 = (2x + 3y)((2x)^2 - 2x \cdot 3y + (3y)^2)$$

— SZEŚCIAN RÓŻNICY

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(2x - 3y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = (2x - 3y)((2x)^2 + 2x \cdot 3y + (3y)^2)$$

— INNE

$$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$$

$$a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

6. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

czyli dla każdej liczby będzie pasować

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b :

kwadrat sumy	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	sześcian sumy
kwadrat różnicy	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	sześcian różnicy

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

tym się nie przejmujemy - nie użyjemy tego

różnica kwadratów	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$	prezenty - przykłady użycia wzorów z jakąś liczbą a i 1
różnica sześciąt	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$	
suma sześciąt	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$	
	$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$		

tym się nie przejmujemy - nie użyjemy tego



STUDENCKI TIP OD NATI

Co prawda wzory skróconego mnożenia są na karcie, którą otrzymasz na maturze, ale mimo wszystko warto znać je na pamięć. **Wzory skróconego mnożenia to na maturze świętość!**

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Dla każdej liczby rzeczywistej a wyrażenie $(2a - 3)^2 - (2a + 3)^2$ jest równe

A. $-24a$

B. 0

C. 18

D. $16a^2 - 24a$

$$(2a - 3)^2 - (2a + 3)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 - ((2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2) =$$

kwadrat różnicy

kwadrat sumy

rozwijam wzory

$$= 4a^2 - 12a + 9 - (4a^2 + 12a + 9) = 4a^2 - 12a + 9 - 4a^2 - 12a - 9 = -24a$$

- przed nawiasem zmieniam znak!

Zadanie 2.

Liczba $(1 + \sqrt{5})^2 - (1 - \sqrt{5})^2$ jest równa

A. 0

B. (-10)

C. $4\sqrt{5}$

D. $2 + 2\sqrt{5}$

$$(1 + \sqrt{5})^2 - (1 - \sqrt{5})^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 - (1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2) =$$

kwadrat sumy

kwadrat różnicy

rozwijam wzory

$$= 1 + 2\sqrt{5} + 5 - (1 - 2\sqrt{5} + 5) = 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5 = 4\sqrt{5}$$

- przed nawiasem zmieniam znak!

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 3.

Liczby rzeczywiste x i y są dodatnie oraz $x \neq y$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}$ można przekształcić do postaci

A. $\frac{2}{x-y}$

B. $\frac{2}{x^2-y^2}$

C. $\frac{2x}{x^2-y^2}$

D. $\frac{-2xy}{x+y}$

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{(x-y) \cdot (x+y)} + \frac{x-y}{(x+y)(x-y)} = \frac{x+y+x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x}{x^2-y^2}$$

1. Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika

Dodajemy ułamki do siebie

2. Zauważamy wzór skróconego mnożenia i zwijamy go!

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Zadanie 4.

Dla każdej liczby rzeczywistej x , wyrażenie $4x^2 - 12x + 9$ jest równe:

A. $(4x+3)(x+3)$

B. $(2x-3)(2x+3)$

C. $(2x-3)(2x-3)$

D. $(x-3)(4x-3)$

$$4x^2 - 12x + 9 = ?$$

Patrzmy do tablicy ze wzorami i szukamy, który nam pasuje. Znaki "-" i "+" wskazują na kwadrat różnicy.

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Teraz musimy zwinąć wzór. Co jest moim a a co b ?

$$a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = \sqrt{4x^2}$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{9}$$

$$\begin{aligned} (2x)^2 &= 4x^2 \\ 3^2 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 2x \\ b &= 3 \end{aligned}$$

$$2ab = 12x \Rightarrow 2 \cdot 2x \cdot 3 = 12x$$

Sprawdzamy czy środkowy wyraz $2ab$ się zgadza

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= (2x-3)^2 \\ (2x-3)^2 &= (2x-3)(2x-3) \end{aligned}$$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
też wydrukować



Zadanie 1.

Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $(3x-2)^2 - (2x-3)(2x+3)$ jest po uproszczeniu równe

A. $5x^2 - 12x - 5$

B. $5x^2 - 13$

C. $5x^2 - 12x + 13$

D. $5x^2 + 5$

Podpowiedź: jeden wzór musisz tu rozwinąć, a drugi zwinąć. Widzisz jakie to wzory?



Zadanie 2.

Dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od (-3) i (-2) wartość wyrażenia

$\frac{x+3}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2+2x}{2x+6}$ jest równa wartości wyrażenia

A. $\frac{x}{2}$

B. $\frac{x}{4}$

C. $\frac{x}{2x+4}$

D. $\frac{x^3+3x^2}{6x^2+24x+24}$

Podpowiedź: przyda się tu też wyciąganie wspólnego czynnika przed nawias. Znajdziesz to w 3 rozdziale tych notatek.

 Zadanie 3.

 Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



Kanał Stuencki

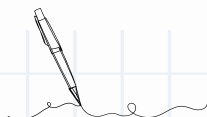
Liczba $(5 - 2\sqrt{3})^2$ jest równa

A. $25 + 4\sqrt{3}$

B. $25 - 4\sqrt{3}$

C. $37 + 20\sqrt{3}$

D. $37 - 20\sqrt{3}$



 Zadanie 4.

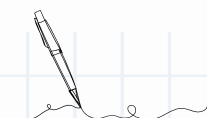
Kwadrat liczby $8 - 3\sqrt{7}$ jest równy

A. $127 + 48\sqrt{7}$

B. $127 - 48\sqrt{7}$

C. $1 - 48\sqrt{7}$

D. $1 + 48\sqrt{7}$



 Zadanie 5.



Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



Kanał Stuencki

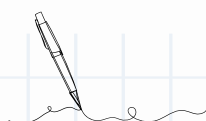
Liczba $2\log_2 3 - 2\log_2 5$ jest równa

A. $\log_2 \frac{9}{25}$

B. $\log_2 \frac{3}{5}$

C. $\log_2 \frac{9}{5}$

D. $\log_2 \frac{6}{25}$



2

Usuwanie niewymierności z mianownika

PRZYPOMNIENIE

Przykłady liczb wymiernych i niewymiernych znajdziesz w materiałach "Liczby rzeczywiste", str. 36

DEFINICJA LICZBY NIEWYMIERNEJ

- Liczy niewymiernej (np. pierwiastka) nie można zapisać w postaci ułamka zwykłego.
- Natomiast liczbę wymierną już możemy – i bardzo to lubimy!

PO CO USUWAMY NIEWYMIERNOŚCI Z MIANOWNIKA?

- Gdy mamy ułamki, to bardzo **nie chcemy pierwiastków w mianowniku (pod kreską ułamkową)**, zwykła (wymierna) liczba ułatwia ręczne obliczenia i przybliżanie ułamków
- Chcemy otrzymać **w mianowniku liczbę wymierną**

JAK USUNĄĆ NIEWYMIERNOŚĆ Z MIANOWNIKA?

Mnożąc licznik i mianownik przez niewymierność (pierwiastek) znajdującą się w mianowniku – nie zmienia to wartości ułamka, a nam wiele ułatwia.

PRZYKŁAD 1. W mianowniku znajduję się sam pierwiastek lub pierwiastek pomnożony przez jakąś liczbę wymierną (zwykłą, np. 4, 8 itd.).

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = ?$$

Mamy pierwiastek w mianowniku, pozbyćmy się go

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Mnożymy licznik i mianownik przez pierwiastek, którego chcemy się pozbyć

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Zielona ramka jest równa 1, nie zmienia nam wyniku. Upraszczamy i gotowe, nasz mianownik już jest wymierny :)

PRZYKŁAD 2. W mianowniku pojawia się suma lub różnica liczb, gdzie przynajmniej jedna jest pierwiastkiem

$$\frac{2}{3 - \sqrt{5}} = ?$$

Widzimy w mianowniku różnicę

$$\frac{2}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

Mnożymy przez wyrażenie co w mianowniku, tylko że z **PRZECIWNYM znakiem**. Otrzymujemy wzorek skróconego mnożenia!

$$\begin{aligned} \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} &= \frac{2(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5})} = \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{3^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Wzorek, o którym mowa
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$



Różne przypadki usuwania niewymierności

1

W MIANOWNIKU SAM PIERWIASTEK

- wymnażamy licznik i mianownik przez pierwiastek

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$$
$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

2

W MIANOWNIKU PIERWIASTEK PRZEMNOŻONY PRZEZ LICZBĘ

- wymnażamy licznik i mianownik przez **SAM pierwiastek**
- nie wymnażamy przez liczbę, która stoi obok pierwiastka!

$$\frac{3}{4\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{4 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

3

W MIANOWNIKU MAMY SUMĘ/RÓŻNICĘ, GDZIE PRZYNAJMNIEJ JEDEN WYRAZ TO PIERWIASTEK

- używamy wzoru skróconego mnożenia** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Wymnażamy przez **to samo wyrażenie tylko ze zmienionym znakiem** (zamiast różnicy - suma, zamiast sumy - różnica)

RÓŻNICA

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{2\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{2\sqrt{3}+2}{3-1} = \frac{2\sqrt{3}+2}{2}$$
$$= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$$

SUMA

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) \cdot (\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{3-1} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2}$$
$$= \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}-1$$

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{15 - 4\sqrt{6}}{\sqrt{19}}$



$$\frac{15 - 4\sqrt{6}}{\sqrt{19}} \cdot \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{19}} = \frac{(15 - 4\sqrt{6}) \cdot \sqrt{19}}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{19}} = \frac{15 \cdot \sqrt{19} - 4\sqrt{6} \cdot \sqrt{19}}{19} = \frac{15\sqrt{19} - 4\sqrt{114}}{19}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{19}} = 1$$

Zapamiętaj: to przez co mnożymy ułamek musi być równe 1, nie chcemy zmieniać wartości ułamka

Zadanie 2.

Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{23}{2\sqrt{6}}$



$$\frac{23}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{23\sqrt{6}}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{23\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{23\sqrt{6}}{12}$$

Mnożymy tylko przez pierwiastek

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1$$



STUDENCKI TIP OD NATI

Często jak widzisz niewymierność w mianowniku na maturze, trzeba będzie użyć wzorków skróconego mnożenia - to, co uwielbiamy i znamy :)

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 3.

Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

Mamy różnicę w mianowniku, a chcemy pozbyć się pierwiastka. Jak to zrobimy? Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia!

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Przy usuwaniu niewymierności będziemy używać bardzo często tego wzoru.

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} = ?$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)} = \frac{3\sqrt{2}+3}{2-1} = \frac{3\sqrt{2}+3}{1} = 3\sqrt{2}+3$$

Zadanie 4.

Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{3\sqrt{6}-6}{3-6\sqrt{6}}$

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{6}-6}{3-6\sqrt{6}} \cdot \frac{3+6\sqrt{6}}{3+6\sqrt{6}} &= \frac{(3\sqrt{6}-6) \cdot (3+6\sqrt{6})}{(3-6\sqrt{6}) \cdot (3+6\sqrt{6})} = \frac{3\sqrt{6} \cdot 3 + 3\sqrt{6} \cdot 6\sqrt{6} - 6 \cdot 3 - 6 \cdot 6\sqrt{6}}{3^2 - (6\sqrt{6})^2} = \\ &= \frac{9\sqrt{6} + 108 - 18 - 216}{9 - 216} = \frac{9\sqrt{6} - 126}{-20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6\sqrt{6})^2 &= 6^2 \cdot (\sqrt{6})^2 = 36 \cdot 6 \\ &= (\sqrt{6})^2 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
też wydrukować



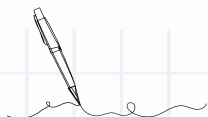
Zadanie 1.

Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{77}{\sqrt{11}}$



Zadanie 2.

Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{21}{4\sqrt{3}}$



 Zadanie 3.



Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



Kanał Stuencki

Liczba $2\log_2 3 - 2\log_2 5$ jest równa

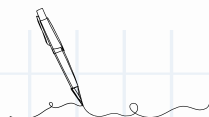
Usuń niewymierność z mianownika:

A. $\log_2 \frac{9}{25}$

B. $\log_2 \frac{3}{5}$

C. $\log_2 \frac{9}{5}$

$$\frac{4\sqrt{5} - 3}{1 - 2\sqrt{5}} \log_2 \frac{6}{25}$$



 Zadanie 4.

Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{3\sqrt{16} + \sqrt{6}}{\sqrt{3} - 3\sqrt{16}}$



3

Wyłączanie współczynnika przed nawias

DO CZEGO SIĘ PRZYDAJE?

- Upraszcza wyrażenia i ułatwia obliczenia
- Pomaga w dowodach algebraicznych
- Pomaga rozwiązać równania wymierne i wielomianowe
- Kolejne podstawowe narzędzie na maturę (oprócz wzorów skróconego mnożenia)

WYCIĄGANIE WSPÓLNEGO CZYNNIKA PRZED NAWIAS

$$ab + ac + ad \rightarrow \underline{a}b + \underline{a}c + \underline{a}d = \underline{a}(b + c + d)$$

a jest wspólnym czynnikiem trzech składników (pojawia się w każdym z nich)

Wyciągamy a przed nawias, w nawiasie zostaje nam wszystko oprócz zabranego a.

warto sobie podkreślić kolorkiem wspólny czynnik

Wyciąganie czynnika przed nawias to tak naprawdę dzielenie przez tę liczbę!

Dobra, zobaczmy przykład liczbowy

PRZYKŁAD 1. Wyciągnijmy wspólny czynnik z poniższej sumy.

$$2xy + 15x = ? \quad \underline{2}xy + \underline{15}\underline{x} \rightarrow 2xy + 15x = \underline{x}(2y + 15)$$

Szukamy wspólnego czynnika - coś co powtarza się w $2xy$ i $15x$.
Powtarza nam się x



STUDENCKI TIP OD OLI

Możesz rozpisywać sobie każdy składnik działania na boku na mnożenie i szukać wspólnego czynnika. Wszystko, co zostaje w mnożeniu, zapisujemy w nawiasie.

$$\begin{aligned} 2 \times y &= 2 \cdot \underline{x} \cdot y \\ 15xy &= 15 \cdot \underline{x} \cdot y \\ x^2 &= \underline{x} \cdot x \end{aligned}$$

Kilka przykładów!

Czas przeanalizować zadania

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$ jest równe iloczynowi

- A. $5a^2(1 - 10b + 3)$ B. $5a(a - 2b + 3)$ C. $5a(a - 10b + 15)$ D. $5(a - 2b + 3)$

Spójrzmy, co się powtarza w każdym wyrażeniu. Widzimy, że a - wyciągnijmy a przed nawias

$$5a^2 - 10ab + 15a = a(5a - 10b + 15) = 5a(1a - 2b + 3)$$

$$5:5=1$$

$$10:5=2$$

$$15:5=3$$

Co więcej, każda z liczb dzieli się przez 5, zatem 5 też wyciągnijmy przed nawias

Sprawdzenie. Czy po wymnożeniu otrzymamy wyrażenie początkowe?

$$5a(a - 2b + 3) = 5a \cdot a - 5a \cdot 2b + 5a \cdot 3 = 5a^2 - 10ab + 15a$$

TAK! - zadanie rozwiązane poprawnie

Zadanie 2.

Wylącz wspólny czynnik przed nawias:

$$12a^3b^2c^5 - 6ab^7c^3 + 9a^8b^4c^2$$

Patrzmy, które literki się powtarzają - a, b, c. Zwróćmy uwagę na różne potęgi!

Skąd wiedzieć, do której potęgi mają być podniesione liczby przed nawiasem? **Bierzemy najmniejszą potęgę!**

$$\begin{array}{l} a^1 \cdot a^2 = a^3 \\ b^2 \cdot b^0 = b^2 \\ c^2 \cdot c^3 = c^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^1 \cdot a^0 = a^1 \\ b^2 \cdot b^5 = b^7 \\ c^2 \cdot c^1 = c^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^1 \cdot a^7 = a^8 \\ b^2 \cdot b^2 = b^4 \\ c^2 \cdot c^0 = c^2 \end{array}$$

Czy liczby nie dzielą się przez tę samą liczbę? Dzielą się przez 3 :) Wyciągamy 3 przed nawias

$$12:3=4$$

$$6:3=2$$

$$9:3=3$$

$$\begin{aligned} 12a^3b^2c^5 - 6ab^7c^3 + 9a^8b^4c^2 &= 3abc^2(4a^2c^3 - 2b^5 + 3a^7b^2) \\ &= 3abc^2(4a^2c^3 - 2b^5 + 3a^7b^2) \end{aligned}$$

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 3.

Wylącz wspólny czynnik przed nawias:

$$7mn^2 + 49n + 35n^7$$

$$\begin{aligned} 7mn^2 + 49n + 35n^7 &= n(7mn + 49 + 35n^6) = \\ &= 7n(mn + 7 + 5n^6) \end{aligned}$$

Każda z liczb jest podzielna na 7, więc wyciągnijmy ją przed nawias.

1. 7 razy ile da nam 7? 1
2. 7 razy ile da nam 49? 7
3. 7 razy ile da nam 35? 5

$$\begin{aligned} 7:7 &= 1 \\ 49:7 &= 7 \\ 35:7 &= 5 \end{aligned}$$

Zadanie 4.

Wylącz wspólny czynnik przed nawias:

$$4x(z - y) + 9(z - y)$$

$$4x(z - y) + 9(z - y) = (z - y) \cdot (4x + 9)$$

Wspólnym czynnikiem jest $(z - y)$. Wyciągam całe wyrażenie przed nawias. W nawiasie zostaje mi $4x$ i 9 .

Twoja kolej, czyli zadania z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
też wydrukować



Zadanie 1.

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:

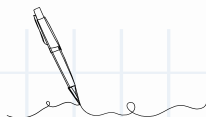
$$36a^4b^{20}c^3 - 9ab^9c^7 - 81a^3b^8c^{11}$$



Zadanie 2.

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:

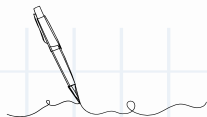
$$80a(b + c) - 67(b + c)$$



 Zadanie 3.

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:

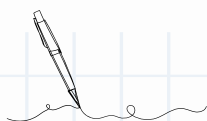
$$7xy + 19xy^2 - 8x^2yz^2 + 14xyz$$



 Zadanie 4.

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:

$$28m^9n + 112n^3$$



4

Dowody algebraiczne Podzielność liczb

ZASADY PODZIELNOŚCI

ZASADY PODZIELNOŚCI PRZEZ DANĄ LICZBĘ

Liczba jest podzielna przez:

- **2** – ostatnia cyfra to 0, 2, 4, 6, 8. Wszystkie liczby parzyste są podzielne przez 2.
- **3** – suma cyfr jest podzielna przez 3
- **4** – dwie ostatnie cyfry są podzielne przez 4
- **5** – ostatnia cyfra to 0 lub 5
- **6** – jest podzielna przez 2 i 3
- **8** – trzy ostatnie cyfry są podzielne przez 8
- **9** – suma cyfr jest podzielna przez 9
- **10** – ostatnia cyfra to 0

PARZYSTOŚĆ

Każdą liczbę parzystą, gdzie k to liczba całkowita, możemy zapisać w postaci :

$$2k$$

NIEPARZYSTOŚĆ

Każdą liczbę nieparzystą, gdzie k to liczba całkowita, możemy zapisać w postaci :

$$\frac{2k+1}{2k-1} \text{ lub}$$

Podstawy sobie przypomnieliśmy. Lecimy dalej!

PRZYKŁAD 1. Sprawdź, czy 1839 jest liczbą podzielną przez 3

1839 ?

Czy 1839 jest podzielne przez 3?

$$1 + 8 + 3 + 9 = 21$$

Sumujemy każdą z cyfr.
Otrzymujemy 21

$$\rightarrow 21 : 3 = 7$$

Sprawdzamy czy 21 jest podzielne przez 3. Nie ma reszty, w takim razie jest.



STUDENCKI TIP OD NATI

Warto nauczyć się zasad podzielności. Zasada podzielności 3 i 9 jest podobna, tak samo z 4 i 8. Kojarz sobie je razem.



1 KORZYSTAJ Z WZORÓW SKRÓCONEGO MNOŻENIA

- Prawie w każdym dowodzie (zwłaszcza z podzielności) przydadzą Ci się wzory skróconego mnożenia. **Jeśli utkniesz lub nie będziesz wiedział, co zrobić, spróbuj zwinąć lub rozwinąć wzór!**

2 WYCIĄGAJ WSPÓŁCZYNNIK PRZED NAWIAS

- **Liczby w nawiasie muszą zostać całkowite!**
- Jeżeli masz wykazać podzielność przez 4, to będzie trzeba 4 wyciągnąć przed nawias,
- Jeżeli podzielność przez 10, to 10 wyciągnąć przed nawias
- Jeżeli parzyste – to 2 wyciągnąć przed nawias itd.

$$\text{LICZBA, PRZEZ KTÓRĄ MA BYĆ PODZIELNE} \cdot \left(\text{COŚ CAŁKOWITEGO} \right)$$

DOJŚCIE DO TAKIEJ POSTACI NAJCZĘŚCIEJ KOŃCZY DOWÓD NA PODZIELNOŚĆ

3 W DODAWANIU POTĘG WYCIĄGAJ NAJMNIEJSZĄ WSPÓLNĄ PRZED NAWIAS

Jeśli chcielibyśmy wykazać podzielność przez 4 z poniższej sumy, to np:

$$\begin{aligned} 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 &= \\ &= 2^2(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \end{aligned}$$

Otrzymujemy 4*coś całkowitego!
Koniec dowodu

- **Nie ma wzorów na dodawanie potęg,**
- Żeby dojść do postaci **liczba*coś całkowitego**, musimy poradzić sobie inaczej – wyciągając przed nawias najmniejszą wspólną potęgę
- Korzystamy z wzoru na mnożenie potęg o tych samych podstawach (patrz notatki z liczb rzeczywistych)

4 PISZ KOMENTARZE I OPISUJ, CO ROBISZ!

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej n liczba $3n^2 + 4n + 1$ jest podzielna przez 4.

n jest całkowite i nieparzyste. Zapis liczby nieparzystej już znamy jest to $2k+1$. Podstawiamy nasze $2k+1$ pod n i wyznaczamy wszystko, co się da.

$$n = 2k + 1, k \in \mathbb{C}$$

wzór skróconego mnożenia - one są wszędzie!

$$\begin{aligned} 3(2k+1)^2 + 4(2k+1) + 1 &= 3 \cdot ((2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2) + 4 \cdot 2k + 4 \cdot 1 + 1 = \\ &= 3 \cdot (4k^2 + 4k + 1) + 8k + 4 + 1 = 12k^2 + 12k + 3 + 8k + 5 = \\ &= 12k^2 + 20k + 8 = 4(3k^2 + 5k + 2) \end{aligned}$$

$12 = 4 \cdot 3 \quad 20 = 4 \cdot 5 \quad 8 = 4 \cdot 2$

Wyciągamy 4 przed nawias i koniec dowodu! Jeżeli k jest liczbą całkowitą, to cały podkreślony nawias również jest liczbą całkowitą.

Zadanie 2.

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $5n^2 + 15n$ jest podzielna przez 10.

$$5n^2 + 15n = 5n(n+3)$$

I° n jest liczbą parzystą $\Rightarrow n = 2k, k \in \mathbb{N}$

$$5 \cdot 2k \cdot (2k + 3) = 10k(2k + 3)$$

$\hookrightarrow$ iloczyn jest podzielny przez 10

Rozwiążemy to na dwa sposoby!

II° n jest liczbą nieparzystą $\Rightarrow n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$

$$5 \cdot (2k+1) \cdot (2k+1+3) = 5(2k+1) \cdot (2k+4) = 5(2k+1) \cdot 2(k+2) = 10(2k+1) \cdot (k+2)$$

$\hookrightarrow$ iloczyn jest podzielny przez 10

Otrzymujemy 10 razy coś całkowitego, co kończy dowód

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 3.

Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 8 jest równa 6.

$n, n+1, n+2, n+3$ - cztery kolejne liczby naturalne

↳ musimy je jeszcze podnieść do kwadratu!

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 =$$

$$= 4n^2 + 12n + 14 = 4(n^2 + 3n) + 14 = 4(n^2 + 3n) + 8 + 6 \quad \checkmark \rightarrow \text{masz resztę 6}$$

↳ $4n(n+3) + 8$ jest zawsze podzielne przez 8

↳ jest zawsze parzyste $\Rightarrow$
 $4n(n+3) + 8$ dzieli się na 8

Zadanie 4.

Uzasadnij, że liczba $4^{12} + 4^{13} + 4^{14}$ jest podzielna przez 42.

↳ wyciągamy przed nawias 4^{12} - tyle ile max możemy

$$4^{12} + 4^{13} + 4^{14} = 4^{12} (1 + 4^1 + 4^2) = 4^{12} \cdot (1 + 4 + 16) = 21 \cdot 4^{12} =$$

$$= 21 \cdot 4 \cdot 4^{11} = 21 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4^{11} = 42 \cdot 2 \cdot 4^{11}$$

21 · 2 da nam 42 - to co chcemy

Otrzymujemy 42 razy coś całkowitego, co kończy dowód

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
też wydrukować



Zadanie 1.

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.



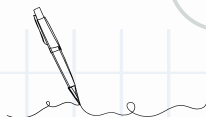
Zadanie 2.

Dana jest liczba

$$a = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

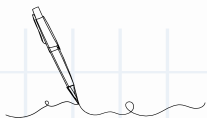
Wykaż, że a jest liczbą całkowitą. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: Usuń niewymierności z mianowników.



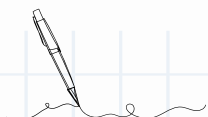
 Zadanie 3.

Wykaż, że liczba $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.



 Zadanie 4.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36



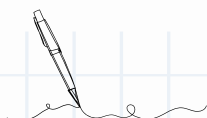
 Zadanie 5.

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $(2n + 1)^2 - 1$ jest podzielna przez 8.



 Zadanie 6.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k reszta z dzielenia liczby $49k^2 + 7k - 2$ przez 7 jest równa 5.



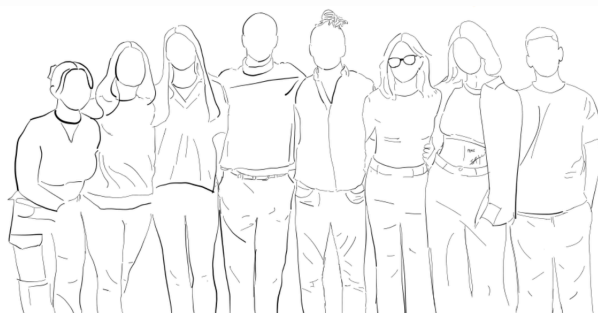
wspieramy pro **STUDENTCKU**



praktyka



nauka



przedsię
biorczość



inicjatywa

Dziękujemy za wspólną naukę. Mamy nadzieję, że zdobywanie wiedzy było dla Ciebie przyjemne. Do zobaczenia na studiach!

Powodzenia!

ŚLEDŹ DALEJ!



www.tumatura.pl



[@tuMATURA](https://www.youtube.com/@tuMATURA)

KANAŁ
STUDENTCKI

I DOŁĄCZ DO
STUDENCKIEJ
SPOŁECZNOŚCI!



[@kanalstudencki](https://www.instagram.com/kanalstudencki)



[@kanal.studencki](https://www.facebook.com/kanal.studencki)



www.kanalstudencki.pl



kontakt@kanalstudencki.pl

Wydane przez Fundację Kanał Studencki.
Wszelkie prawa zastrzeżone. Podręcznik
integralny z zajęciami tuMATURA, dostępnymi
na: www.tumatura.pl

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

– **3** HEJ, TO MY!

– **4** CZYM JEST TU.MATURA?

– **5** WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

6 WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

15 USUWANIE NIEWYMIERNOŚCI
Z MIANOWNIKA

21 WYŁĄCZANIE CZYNNIKA PRZED
NAWIAS

26 DOWODY ALGEBRAICZNE,
PODZIELNOŚĆ LICZB

Available

LICZBY RZECZYWISTE

COMING SOON

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

FUNKCJE

CIĄGI

TRYGONOMETRIA

STEREOMETRIA

PLANIMETRIA

GEOMETRIA ANALITYCZNA

RACHUNEK

PRAWDOPODOBIENSTWA I
STATYSTYKA

OPTYMALIZACJA

Opracowanie merytoryczne: Natalia Król, Aleksandra Benowska

Korekta: Adam Łuczka

Oprawa graficzna i skład: Aleksandra Benowska