

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}$$

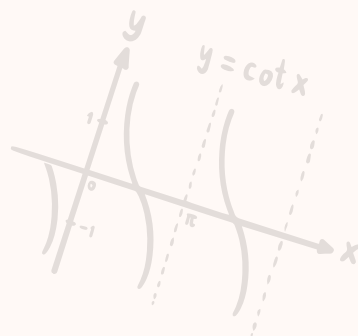
Trygonometria

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

Bezpłatne notatki i zadania maturalne

POZIOM PODSTAWOWY

Zgodnie z nową formułą 2023



$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$



*Konkursy i nagrody na
naszym Discordzie!*

www.tumatura.pl

Spis treści

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

1	O nas, projekt <u>TuMatura</u>	str 3
2	Wymogi CKE	str 4
3	Trygonometria	str 5-25
	Karta wzorów	str 5-9
	Funkcje trygonometryczne	str 10-14
	Wyjątkowe trójkąty	str 15-16
	Twierdzenie cosinusów	str 17
	Pole trójkąta	str 18-19
	Przykłady zadań maturalnych	str 20-25

Psss... sprawdź resztę naszych notatek na stronie TuMatura.pl

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE - ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.



Obniżamy koszt przygotowania się do matury w Polsce

Czytasz notatki stworzone przez **Fundację Kanał Studencki** w ramach projektu **Tumatura**.

Jeśli uważasz nasze materiały za wartościowe – **weź udział w anonimowym badaniu** i pomóż nam zmierzyć, ile kosztuje przygotowanie się do zdania matury w Polsce.

Anonimowa ankieta

Ile kosztuje przygotowanie się do matury w Polsce?

Odpowiedz



Korzystasz z wersji wydrukowanej?
Zeskanuj kod QR i weź udział w badaniu!

Przejrzysta teoria

Studenckie typy i rady

Zadania maturalne

Wytłumaczone karty wzorów



CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE



STUDENCKI TIP OD OLI

Zastanów się, co już umiesz, a co jeszcze wymaga przećwiczenia.
Warto zaglądać tu raz na jakiś czas – wtedy lepiej widzisz postęp!

UCZEŃ...

- 1 ☐ Wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;

- 2 ☐ Korzysta z wzorów:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- 3 ☐ Stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

- 4 ☐ Oblicza kąty trójkąta prostokątnego i długości jego boków przy odpowiednich danych



Wierzę w Ciebie!

NAZWA

WZÓR

- JEDYNKA TRYGONOMETRYCZNA

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

- WZÓR NA TANGENS ZNAJĄC SIN I COS

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- NA SINUS KĄTA ROZWARTEGO

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

- NA COSINUS KĄTA ROZWARTEGO

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

- NA TANGENS KĄTA ROZWARTEGO

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

- TWIERDZENIE COSINUSÓW

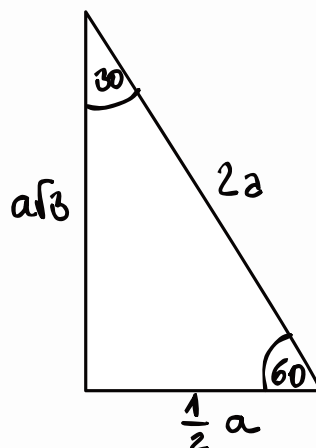
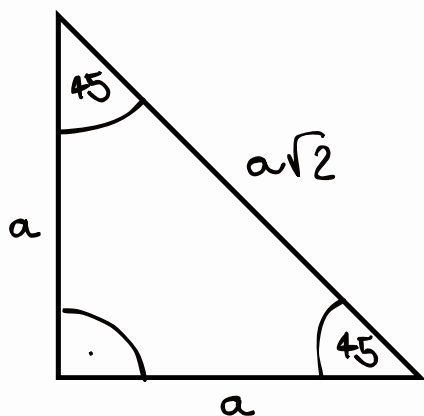
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- POLE TRÓJKĄTA

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

- TRÓJKĄT 45 45 90

- TRÓJKĄT 30 60 90



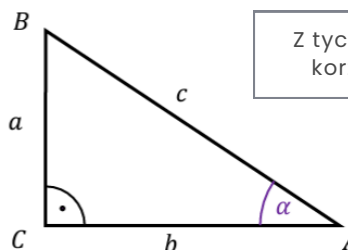
KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

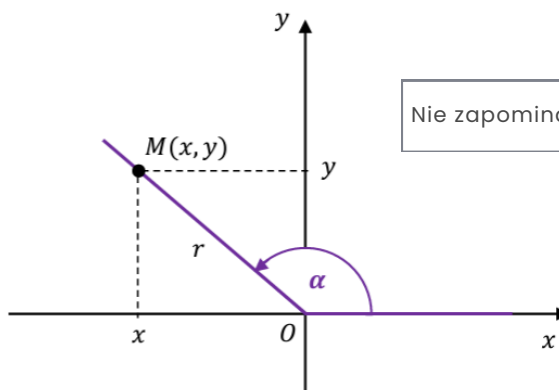


Z tych wzorów będziemy korzystać najczęściej

- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

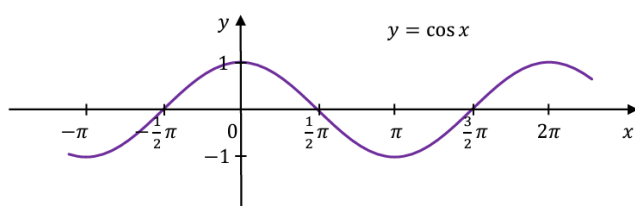
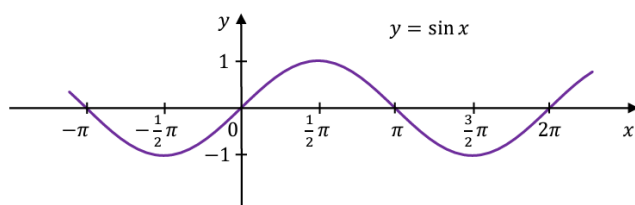
$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x}, \quad \text{o ile } x \neq 0\end{aligned}$$

gdzie
 $r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$

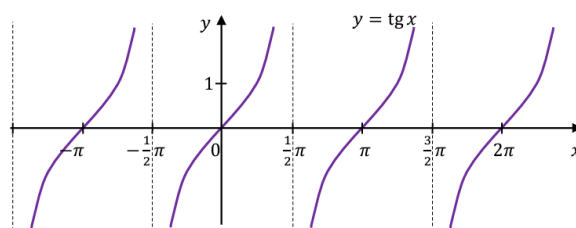


Nie zapominaj o "-" przy tg i cos

- Wykresy funkcji trygonometrycznych



Na maturze podstawowej raczej nie skorzystasz z wykresów



KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

Przydatne przy stosowaniu wzorów redukcyjnych i twierdzeniu cosinusów. Z tej tabelki zdecydowanie będziemy dużo korzystać.

- Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje



- Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów α oraz β prawdziwe są równości:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Ponadto:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \text{gdy} \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \text{gdy} \quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{o ile } \operatorname{tg} \alpha \text{ istnieje i } \operatorname{tg}^2 \alpha \neq 1$$

- Wybrane wzory redukcyjne

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$



Najczęściej będziesz poproszony
o policzenie funkcji 120° , 135° i 150°

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

- Okresowość funkcji trygonometrycznych

Dla każdego kąta α i liczby całkowitej k prawdziwe są związki:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

Ponadto jeżeli $\alpha \neq 90^\circ + m \cdot 180^\circ$ (gdzie $m \in \mathbb{Z}$), to:

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$$

1

Funkcje trygonometryczne

CZYM ZAJMUJE SIĘ TRYGNOMETRIA?

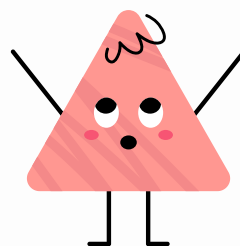
Trygonometria to dział matematyki, który zajmuje się badaniem trójkątów, zwłaszcza trójkątów prostokątnych. Służy do opisywania zależności między bokami i kątami trójkąta.

W skrócie



Proporcje boków w trójkącie prostokątnym. Operujemy na kątach

Cześć to ja!
Trójkątek

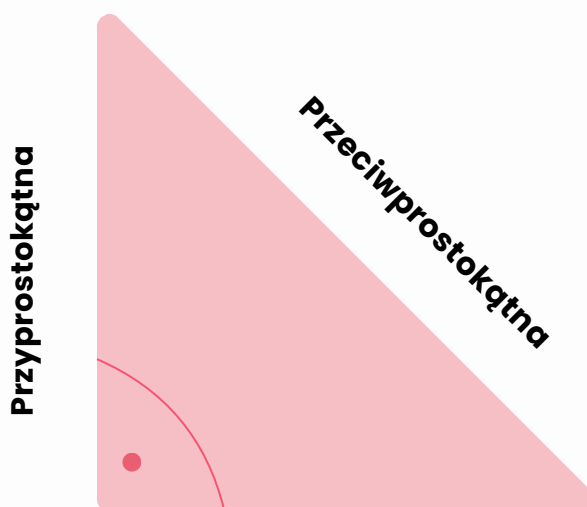


KILKA PODSTAWOWYCH DEFINICJI

Trójkąt prostokątny – trójkąt, który ma TYLKO jeden kąt prosty (90°).

Przeciwprostokątna – najdłuższy bok w trójkącie prostokątnym, leży naprzeciw kąta prostego (90°).

Przyprostokątna – każdy z dwóch krótszych boków w trójkącie prostokątnym. Są one przyległe do kąta prostego. Jeden z nich przylega do kąta, który rozpatrujemy, a drugi leży naprzeciw niego.



To są dwie siostry, ale nie bliźniaczki!

Mogą mieć różne długości

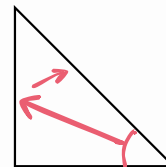
Przyprostokątna

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE JAKIE POZNASZ

Na poziomie podstawowym poznajemy trzy funkcje trygonometryczne. Oto one:

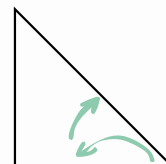
SINUS (sin) – stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



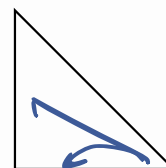
Cosinus (cos) – stosunek długości przyprostokątnej przylegającej do kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$



Tangens (tan) – stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przyprostokątnej przylegającej do kąta.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



PST! Jest jeszcze cotanges, ale nie musisz go umieć na maturze podstawowej.

JAKIE WARTOŚCI PRZYJMUJĄ FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE W KAŻDEJ ĆWIARTCE

II	sin	+	I	sin	+
	cos	-		cos	+
	tg	-		tg	+
III	sin	-	IV	sin	-
	cos	-		cos	+
	tg	+		tg	-

Na maturze podstawowej skupimy się jedynie na pierwszej i drugiej ćwiartce.

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DLA WYBRANYCH KĄTÓW

	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje



STUDENCKI TIP OD EMI

Nie musisz pamiętać tych wartości. Wszystko znajdziesz w tablicach wzorów!

Może się zdarzyć, że zostaniesz poproszony o obliczenie funkcji sinus, cosinus lub tangens dla kąta większego niż 90° . W takim wypadku nie użyjesz wcześniej poznanych wzorów. Z pomocą przychodzi karta z wzorami matematycznymi w dziale trygonometria znajdziesz poniższy rysunek.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

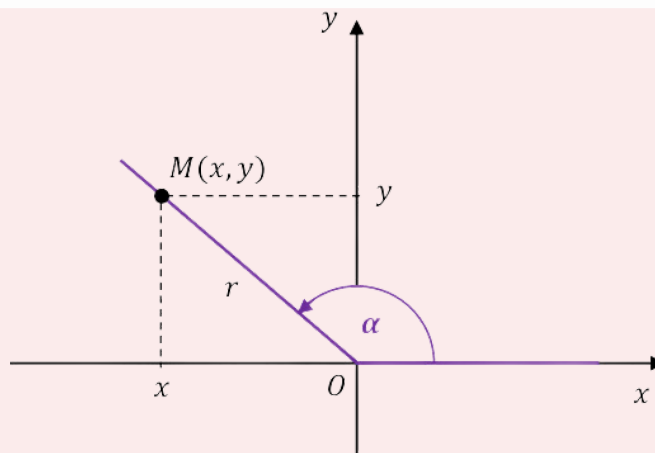
$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \text{o ile } x \neq 0$$

gdzie

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

$|OM|$ to długość odcinka od punktu O do punktu M



M to punkt o współrzędnych (x, y) . Długość odcinka x i y, odczytujemy z osi współrzędnych.

Jak obliczyć funkcje za pomocą powyższych wzorów?

PRZYKŁAD 1

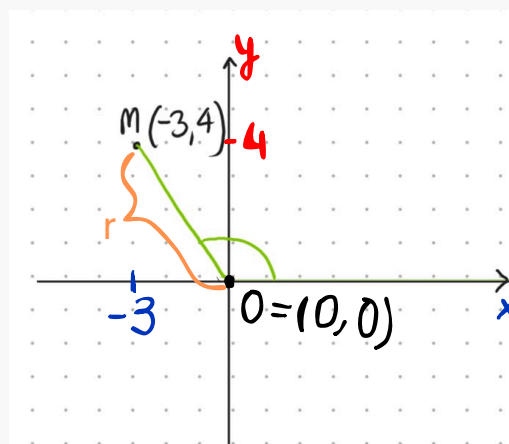
Założmy, że nasz punkt M ma współrzędne $(-3, 4)$. Policzmy zatem sin, cos i tg

1. Liczymy z twierdzenia Pitagorasa długość r, czyli długość odcinka $|MO|=|OM|$

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= r^2 \\ 9 + 16 &= 25 \\ r^2 &= 25 \\ r &= 5 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad = |OM| = |MO|$$

2. wyznaczamy x i y

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ y &= 4 \end{aligned}$$



3. obliczamy sin, cos i tg, czyli teraz tylko podstawiamy do wzorków

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$



STUDENCKI TIP OD NATI

Tak jak długość odcinka x odczytujemy z osi X, tak długość $r=|OM|$ nie możemy odczytać z wykresu lub zmierzyć na oko, trzeba go policzyć. Czemu? Leży on ukośnie względem osi współrzędnych.

Co jeśli nie znamy współrzędnych punktu M? Wtedy z pomocą przychodzą poniższe wzory są to tzw. wzory redukcyjne.

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Jak to działa?



PRZYKŁAD 1

Chcemy obliczyć $\sin 135^\circ$

1. Korzystamy z tego wzoru:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

2. Podstawiamy co wiemy:

alfa u nas to 135°

$$\sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ$$

3. Patrzymy do tabeli i odczytujemy wartość

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Odpowiedź

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

PRZYKŁAD 2

Chcemy obliczyć $\cos 120^\circ$

1. Korzystamy z tego wzoru:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

3. Patrzymy do tabeli i odczytujemy wartość

$$-\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

4. Odpowiedź

2. Podstawiamy co wiemy:

$$\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ$$

Pamiętaj o -.
We wzorach redukcyjnych przy cosinusie pojawia się minus

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

PRZYKŁAD 3 – DO ZROBIENIA DLA CIEBIE

Chcemy obliczyć $\operatorname{tg} 150^\circ$

1. Korzystamy z tego wzoru:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

3. Patrzymy do tabeli i odczytujemy wartość

2. Podstawiamy co wiemy:

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

4. Odpowiedź:

2

Wyjątkowe Trójkąty

CO JEST TAKIEGO WYJĄTKOWEGO W TYCH TRÓJKĄTACH?

Trójkąty o kątach $(45^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$ i $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ są wyjątkowe, ponieważ ich boki mają stałe, proste proporcje, dzięki czemu **łatwo można obliczyć długości boków, znając tylko jeden z nich** (w porównaniu w Pitagorasie, potrzebujemy długości dwóch boków). Są to tzw. trójkąty szczególne, często wykorzystywane w zadaniach maturalnych, gdzie szybkie znalezienie proporcji boków jest przydatne.

❖ Jeśli dostaniesz zadanie, gdzie masz daną długość tylko jednego boku to wiedz co tu się święci – właśnie te trójkąty!

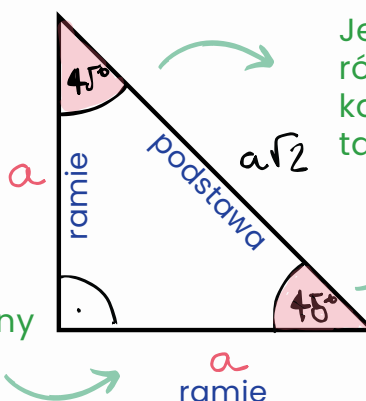
TRÓJKĄT 45 45 90

Pierwszym z wyjątkowych trójkątów to ten o kątach 45 45 90. Oto jego zależności:

WŁASNOŚCI TEGO TRÓJKĄTA:

✓ równoramienny
prostokątny
kąty 45,45,90

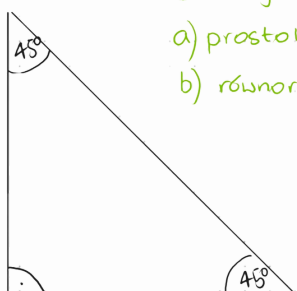
Tutaj mamy bliźniaczki



Jeśli trójkąt jest równoramienny to dwa kąty u podstawy mają taką samą miarę

PRZYKŁAD 1

Wiemy, że trójkąt jest prostokątny, równoramienny. A także, że przeciwprostokątna ma długość 8. Chcemy obliczyć pozostałe długości boków.



- ① wiemy że trójkąt jest
 - a) prostokątny $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
 - b) równoramienny $90^\circ : 2 = 45^\circ$
- wiemy że jest to trójkąt 45 45 90

Dzielimy na dwa bo trójkąt jest równoramienny!

- ② przypominamy sobie zależności
- ③ wiemy że $a\sqrt{2} = 8$ chcemy obliczyć a

$$a\sqrt{2} = 8 / \sqrt{2}$$

$$2a = 8\sqrt{2} / 2$$

$$a = 4\sqrt{2}$$
- ④ uzupełniamy



STUDENCKI TIP OD EMI

Jeśli zapomnisz tych zależności. Możesz wyliczyć brakujący bok korzystając z twierdzenia pitagorasa.

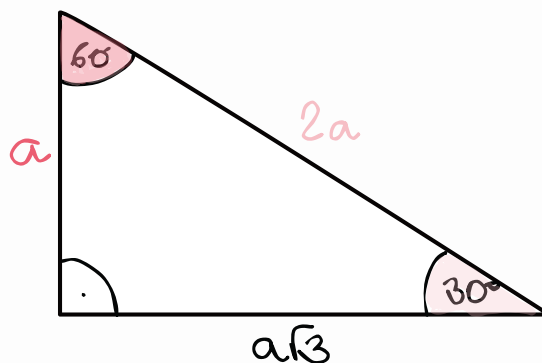
TRÓJKĄT 30 60 90

Drugi wyjątkowy trójkąt jest połową trójkąta równobocznego. Występują w nim poniższe zależności.

WŁASNOŚCI TEGO TRÓJKĄTA:

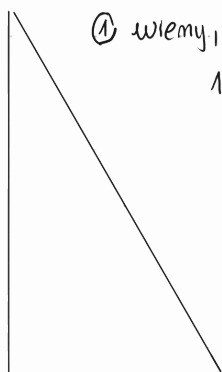


połowa trójkąta
równobocznego
prostokątny
kąty 30,60,90



PRZYKŁAD 2

Wiemy, że trójkąt jest prostokątny oraz kąty są w stosunku 1:2:3. A także, że przeciwprostokątna ma długość 6. Chcemy obliczyć pozostałe długości boków.



① wiemy, że stosunek boków trójkąta jest 3:2:1

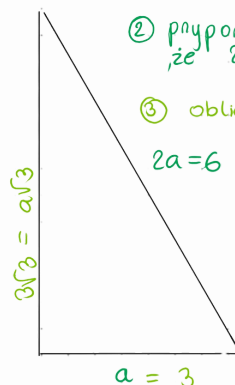
$$180^\circ = 6x$$

$$x = 30^\circ \quad 3+2+1$$

$$2x = 60^\circ$$

$$3x = 90^\circ$$

teraz wiemy że mamy trójkąt $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$



② przypominamy sobie zależności, oraz odczytujemy, że $2a = 6$

③ obliczamy resztę boków

$$2a = 6$$

$$a = 3$$

$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$



STUDENCKI TIP OD EMI

Pamiętaj aby dobrze umiejscowić boki, zwłaszcza kiedy trójkąt będzie odwrócony.

PRZYKŁAD 3- DO ZROBIENIA DLA CIEBIE

Wiemy, że trójkąt jest prostokątny oraz dwa pozostałe kąty są takie same. A także, że przyprostokątna ma długość 3. Chcemy obliczyć pozostałe długości boków.



3

Twierdzenie cosinusów



TWIERDZENIE SINUSÓW- DEFINICJA

Twierdzenie cosinusów pozwala nam obliczyć brakujący trzeci bok trójkąta w sytuacji kiedy znamy długości pozostałych dwóch boków oraz miarę kąta między nimi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

PRZYKŁAD 1

Mamy trójkąt ABC $|AB| = 2$ $|AC| = 5$ a $\cos$ kąta między nimi wynosi $3/5$. Chcemy obliczyć bok $|BC|$

1. Korzystamy z tego wzoru:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

2. Podstawiamy co wiemy:

$$|BC|^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$

3. Obliczamy

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= 4 + 25 - 12 \\ |BC|^2 &= 17 \\ |BC| &= \sqrt{17} \end{aligned}$$



STUDENCKI TIP OD EMI

Wbrew pozorom jest to przydatne twierdzenie zwłaszcza przy zadaniach z działu stereometria

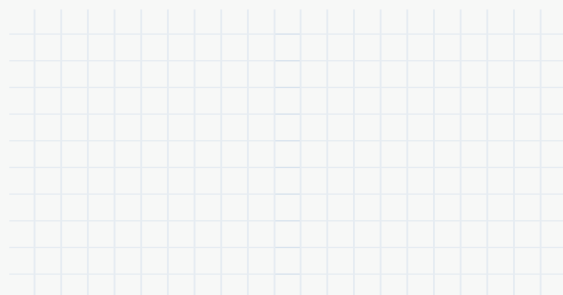
PRZYKŁAD 2: DO ZROBIENIA DLA CIEBIE

Mamy trójkąt ABC $|AB| = 10$ $|BC| = 5\sqrt{3}$ $|AC| = 5$. Oblicz $\cos$ kąta przy wierzchołku B

1. Korzystamy z tego wzoru:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

2. Rysunek pomocniczy:



3. Podstawiamy co wiemy i obliczamy

4

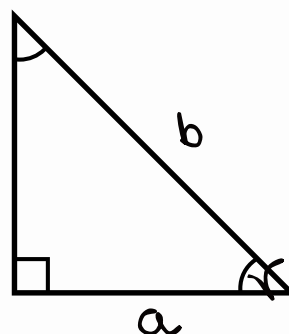
Pole trójkąta

Na pewno znasz ten wzór na pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2}ah$$

Co jeśli nie mamy wysokości lub wszystkich boków trójkąta? Istnieje praktyczny sposób, który umożliwia wyznaczenie pola trójkąta, gdy znamy długości dwóch jego boków oraz kąt między nimi. Oto on:

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$



Jak to działa?

PRZYKŁAD 1

Chcemy obliczyć pole trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 10$, $|BC| = 12$ a kąt między nimi jest kątem prostym.

1. Korzystamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

2. Wyznaczamy $\sin 90^\circ$

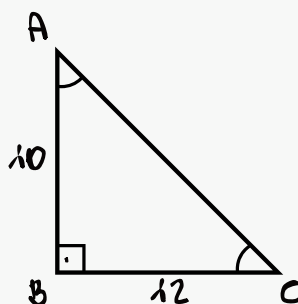
$$\sin 90^\circ = 1$$

3. Podstawiamy co wiemy i obliczamy

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot 1$$

$$P = 60$$

Odpowiedź



PRZYKŁAD 2

Chcemy obliczyć pole trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 5$, $|BC| = 7$ a kąt między ma miarę 30° .

1. Korzystamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

2. Wyznaczamy $\sin 30^\circ$

3. Podstawiamy co wiemy i obliczamy

PRZYKŁAD 3- DO OBLICZENIA DLA CIEBIE

Chcemy obliczyć pole trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 3$, $|BC| = 5$ a kąt między ma miarę 45° .

1. Korzystamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

2. Wyznaczamy $\sin 45^\circ$

3. Podstawiamy co wiemy i obliczamy



STUDENCKI TIP OD NATI

Rysunki w zadaniach gdzie mamy figury geometryczne, długości boków, kąty to klucz do sukcesu!

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = \frac{24}{25}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy

A. $\frac{7}{18}$

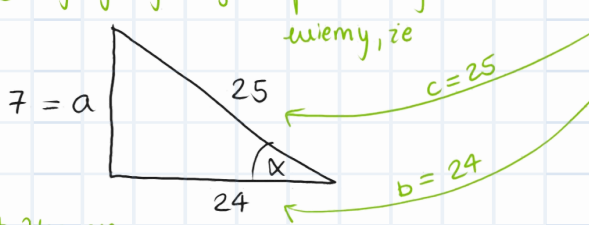
B. $\frac{7}{24}$

C. $\frac{7}{25}$

D. $\frac{18}{25}$

SPOSÓB 1

① rysujemy trójkąt pomocniczy i z $\cos x = \frac{24}{25}$ wiemy, że



② z t. Pitagorasa obliczamy bok a

$$\begin{aligned}a^2 + 24^2 &= 25^2 \\a^2 + 576 &= 625 \\a^2 &= 49 \\a &= 7\end{aligned}$$

③ obliczamy $\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x = \frac{7}{24}$$

SPOSÓB 2

① korzystamy ze wzoru $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\left(\frac{24}{25}\right)^2 + \sin^2 x = 1$$

$$1 - \frac{576}{625} = \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{49}{625} = \frac{7}{25}$$

② korzystamy ze wzoru $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{25} \cdot \frac{25}{24} = \underline{\underline{\frac{7}{24}}}$$

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 2.

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\cos \alpha - \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ jest równe

A. $\cos^3 \alpha$

B. $\sin^2 \alpha$

C. $1 - \sin^2 \alpha$

D. $\cos \alpha$

① wyciągamy $\cos x$ przed nawias

$$\cos x (1 - \sin^2 x)$$

② korzystamy z $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\cos x (\cos^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x)$$

③ sinusy nam znikają

$$\cos x \cdot \cos^2 x$$

④ wynik ostateczny

$$\cos^3 x$$

Zadanie 3.

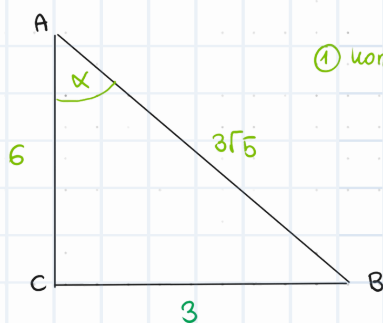
Przyprostokątna AC trójkąta prostokątnego ABC ma długość 6, a przeciwprostokątna AB ma długość $3\sqrt{5}$. Wtedy tangens kąta ostrego CAB tego trójkąta jest równy

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2



① korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$\begin{aligned} 6^2 + |CB|^2 &= (3\sqrt{5})^2 \\ 36 + |CB|^2 &= 45 \\ |CB|^2 &= 9 \\ |CB| &= 3 \end{aligned}$$

② obliczamy $\operatorname{tg} x$

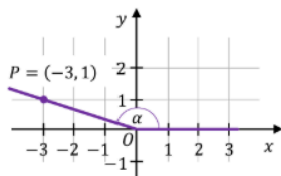
$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 4.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono kąt α o wierzchołku w punkcie $O = (0, 0)$. Jedno z ramion tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią Ox , a drugie przechodzi przez punkt $P = (-3, 1)$ (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy

A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$

B. $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

C. $\left(-\frac{3}{1}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{3}\right)$

① wyznaczamy x i y

$$x = -3$$

$$y = 1$$

② korzystamy ze wzoru $\operatorname{tg} x = \frac{y}{x}$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$$

Zadanie 5.

Liczba $\sin^3 20^\circ + \cos^2 20^\circ \cdot \sin 20^\circ$ jest równa

A. $\cos 20^\circ$

B. $\sin 20^\circ$

C. $\operatorname{tg} 20^\circ$

D. $\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ$

① wyciągamy $\sin 20^\circ$ przed nawias

$$\sin 20^\circ (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ)$$

1

$$\sin 20^\circ \cdot 1 = \sin 20^\circ$$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
też wydrukować



Zadanie 1.

Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$



Zadanie 2.

Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Sinus kąta α jest równy

A. $\frac{24}{49}$

B. $\frac{5}{7}$

C. $\frac{25}{49}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{7}$

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ jest równe

- 



W rombie o boku długości $6\sqrt{2}$ kąt rozwarty ma miarę 150° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn długości przekątnych tego rombu jest równy

- 

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



Zadanie 5.

Kąt α jest ostry oraz $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{64}{9}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

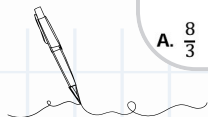
Wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ jest równa

A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{64}{9}$

D. $\frac{9}{64}$



Zadanie 6.

Nie istnieje kąt ostry α taki, że

A. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

B. $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ i $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

C. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

D. $\sin \alpha = \frac{9}{15}$ i $\cos \alpha = \frac{12}{15}$



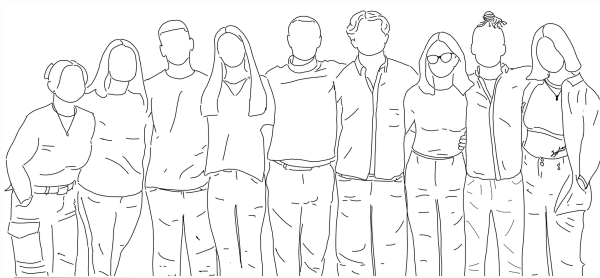
wspieramy *pro* STUDENTCKU



praktyka



nauka



przedsię
biorczość



inicjatywa

Dziękujemy za wspólną naukę. Mamy nadzieję, że zdobywanie wiedzy było dla Ciebie przyjemne. Do zobaczenia na studiach!

Powodzenia!

ŚLEDŹ DALEJ!



www.tumatura.pl



@tuMATURA



@tumatura

Wydane przez Fundację Kanał Studencki.
Wszelkie prawa zastrzeżone.



I DOŁĄCZ DO
STUDENCKIEJ
SPOŁECZNOŚCI!



@kanalstudencki



@kanal.studencki



www.kanalstudencki.pl



kontakt@kanalstudencki.pl

Spis Treści

Czytasz notatki stworzone przez Fundację Kanał Studencki w ramach projektu Tumatura.

1 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE – ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.

