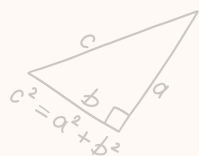


$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

$$\tan \alpha = \frac{B \sin \theta}{A + B \cos \theta}$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$S = \frac{\alpha R^2}{2}$$

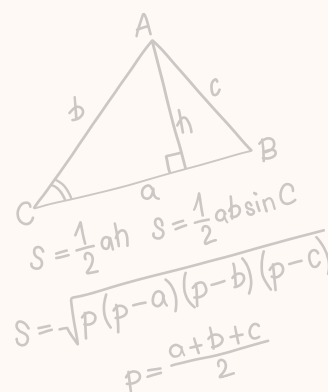
$$l = R\alpha$$

Planimetria

Bezpłatne notatki i zadania maturalne

POZIOM PODSTAWOWY

Zgodnie z nową formułą 2023



$$S = \frac{1}{2}ah \quad S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



Konkursy i nagrody na
naszym Discordzie!

www.tumatura.pl

Spis treści

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

1	O nas, projekt <u>TuMatura</u>	<i>str 3</i>
2	Wymogi CKE	<i>str 4</i>
3	Planimetria	<i>str 5-36</i>
	Karta wzorów	<i>str 5-13</i>
	Prosta, półprosta, odcinek i kąty	<i>str 14-15</i>
	Trójkąty	<i>str 16-20</i>
	Czworokąty	<i>str 21</i>
	Koło i okrąg	<i>str 22-25</i>
	Przykłady zadań maturalnych	<i>str 26-33</i>

Psss... sprawdź resztę naszych notatek na stronie TuMatura.pl

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE - ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.



Obniżamy koszt przygotowania się do matury w Polsce

Czytasz notatki stworzone przez **Fundację Kanał Studencki** w ramach projektu **Tumatura**.

Jeśli uważasz nasze materiały za wartościowe – **weź udział w anonimowym badaniu** i pomóż nam zmierzyć, ile kosztuje przygotowanie się do zdania matury w Polsce.

Anonimowa ankieta

Ile kosztuje przygotowanie się do matury w Polsce?

Odpowiedz



Korzystasz z wersji wydrukowanej?
Zeskanuj kod QR i weź udział w badaniu!

Przejrzysta teoria

Studenckie typy i rady

Zadania maturalne

Wytłumaczone karty wzorów



Obserwuj



Dołącz



Oglądaj

CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE



STUDENCKI TIP OD OLI

Zastanów się, co już umiesz, a co jeszcze wymaga przećwiczenia.
Warto zaglądać tu raz na jakiś czas – wtedy lepiej widzisz postęp!

UCZEŃ...

- 1 ☐ wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa
- 2 ☐ rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
- 3 ☐ rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
- 4 ☐ korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
- 5 ☐ stosuje własności kątów wpisanych i środkowych
- 6 ☐ stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
- 7 ☐ stosuje twierdzenia: Talesa;
- 8 ☐ wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
- 9 ☐ wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
- 10 ☐ stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
- 11 ☐ korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

NAZWA	WZÓR
— TWIERDZENIE PITAGORASA	$a^2 + b^2 = c^2$
— TWIERDZENIE COSINUSÓW	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$
— WZÓR NA POLE DELTOIDU	$P = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD $
— WYSOKOŚĆ W TRÓJKĄCIE RÓWNOBOCZNYM	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
— POLE W TRÓJKĄCIE RÓWNOBOCZNYM	$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
— TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ KĄTA	$\frac{ AD }{ BD } = \frac{ AC }{ BC }$
— POLE KOŁA	$P = \pi r^2$
— OBWÓD KOŁA	$L = 2\pi r$
— POLE WYCINKA KOŁA	$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$
— DŁUGOŚĆ ŁUKU WYCINKA KOŁA	$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$
— WZÓR NA POLE TRAPEZU	$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$
— WZORY NA POLE RÓWNOLEGŁOBOKU I ROMBU	$P = ah$ $P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$ $P = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \gamma$
— POLA FIGUR PODOBNYCH	$\frac{P_B}{P_A} = k^2$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

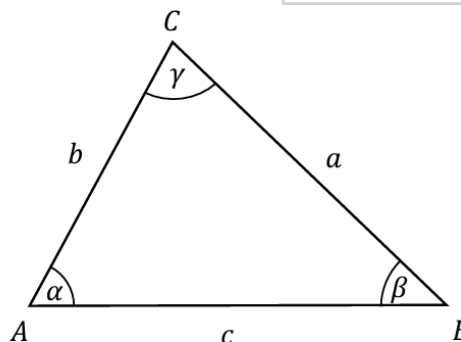
NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

Legenda

Ważne Wzorki

Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC :

- a, b, c – długości boków w trójkącie ABC
- α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących, odpowiednio, przy wierzchołkach A, B oraz C
- R, r – długości promieni okręgów, odpowiednio, opisanego i wpisanego w trójkąt ABC
- h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta opuszczone, odpowiednio, z wierzchołków A, B i C .
- p – połowa obwodu trójkąta ABC , tj.

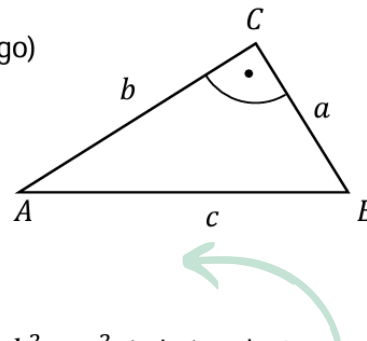


$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Niezwykle przydatne twierdzenie, skorzystasz z niego wiele razy

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Twierdzenie poznaliśmy już w dziale Trygonometria – leć obczaić!

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Wzory na pole trójkąta ABC

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \cdot \sin \beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \quad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2} c^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

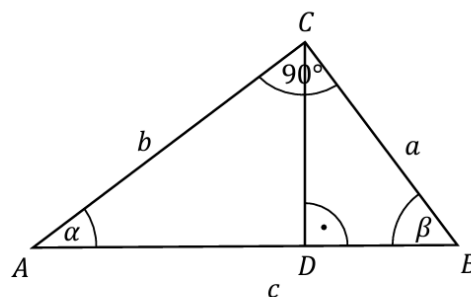
- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \quad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad R = \frac{1}{2}c$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$



- Związki miarowe w trójkącie równobocznym

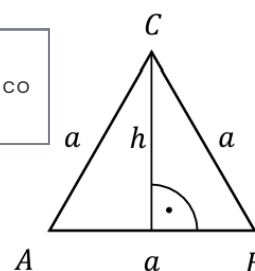
a – długość boku trójkąta równobocznego

h – wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3}h \quad R = \frac{2}{3}h$$

Zobaczysz trójkąt równoboczny i już wiesz co się kroi!

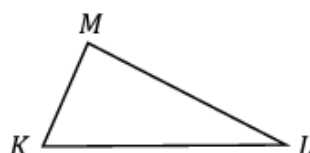
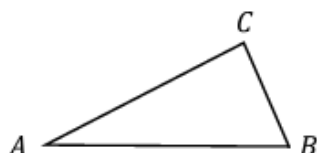


KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Cechy przystawania trójkątów



Przydatne w zadaniach dowodowych

- a) cecha przystawania „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom boków trójkąta KLM , np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$, $|CA| = |ML|$

- b) cecha przystawania „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości dwóch boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.:

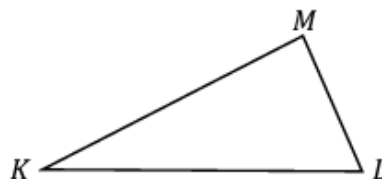
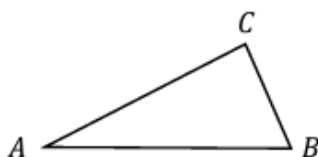
$$|AB| = |KL|, |BC| = |KM| \text{ i } |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$$

- c) cecha przystawania „**kąt–bok–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM :

długość jednego boku trójkąta ABC jest równa długości jednego boku trójkąta KLM i kąty przyległe do tego boku trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta KLM , np.:

$$|AB| = |KL| \text{ oraz } |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM| \text{ i } |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$$

- Cechy podobieństwa trójkątów



- a) cecha podobieństwa „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta KLM , np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$

- b) cecha podobieństwa „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.:

$$\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|} \text{ i } |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$$

- c) cecha podobieństwa „**kąt–kąt–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM :

kąty trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów trójkąta KLM , np.:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM| \text{ i } |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM| \text{ i } |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|$$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Twierdzenie o dwusiecznej kąta

Jeżeli dwusieczna kąta wewnętrznego (zewnątrznego) trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą zawierającą odcinek AB w punkcie D , to:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

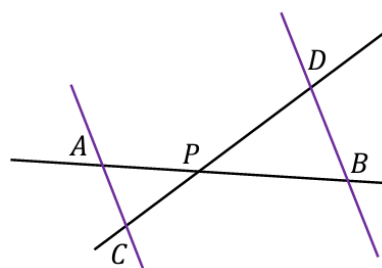
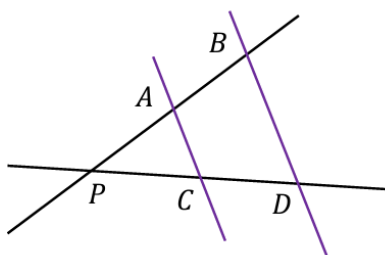
- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Różne proste AB i CD przecinają się w punkcie P , przy czym spełniony jest jeden z warunków:

- punkt A leży wewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży wewnątrz odcinka PD
LUB
- punkt A leży na zewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży na zewnątrz odcinka PD .

Jeżeli $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$, to proste AC i BD są równoległe.

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$.



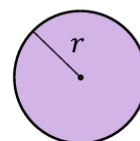
- Koło

Pole P koła o promieniu r jest równe:

$$P = \pi r^2$$

Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L = 2\pi r$$



KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

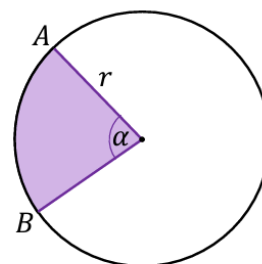
- Wycinek koła

Pole P wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równe:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Długość L łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równa:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

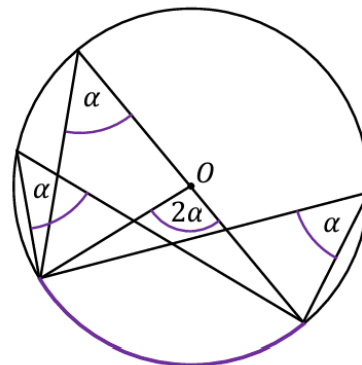


- Kąty w okręgu

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O , opartych na tym samym łuku, są równe.

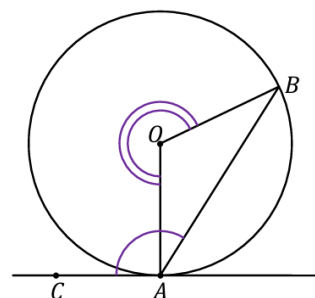
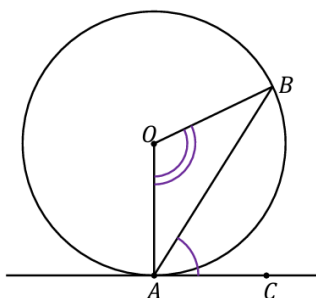
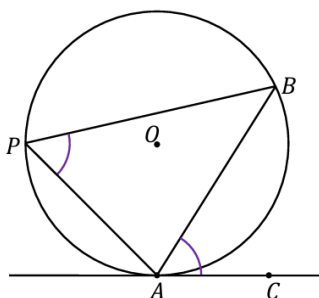


- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i cięciwa AB tego okręgu. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A , natomiast punkt P leży na tym okręgu i nie należy do kąta CAB . Wtedy:

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CAB| \quad \text{ i } \quad |\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$$

przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB .



KARTA WZORÓW

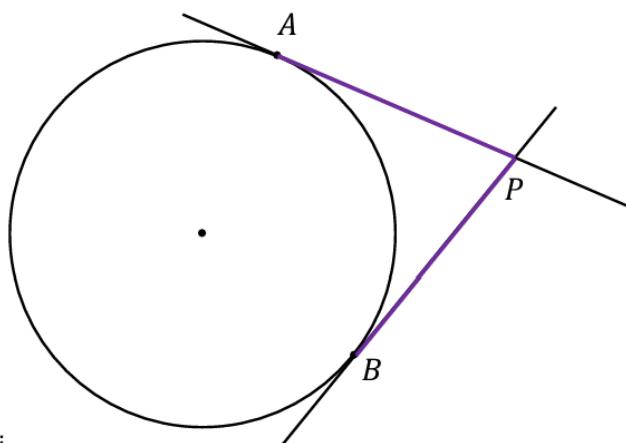
TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

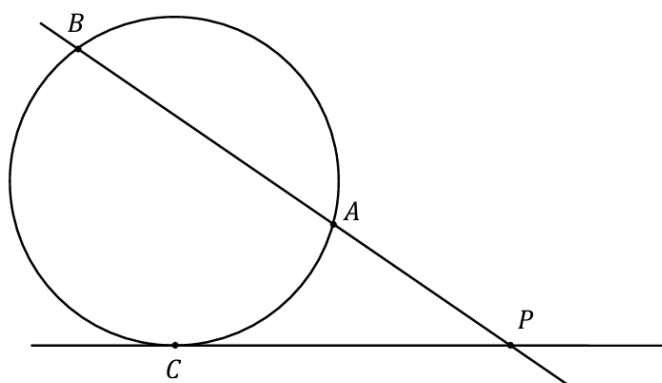
$$|PA| = |PB|$$



- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



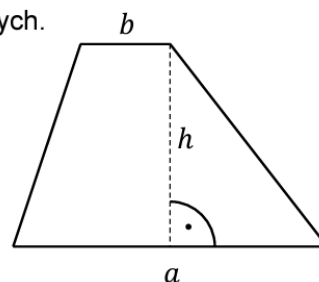
- Czworokąty

Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole P trapezu:

Ten wzór już zapewne
znasz :D

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



KARTA WZORÓW

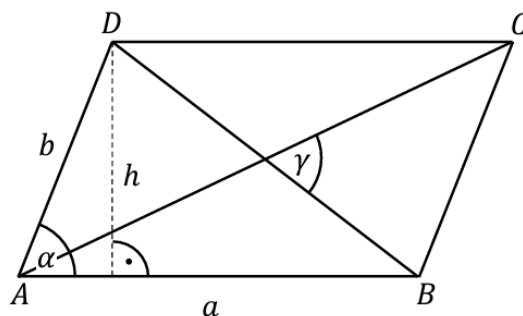
TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole P równoległoboku:

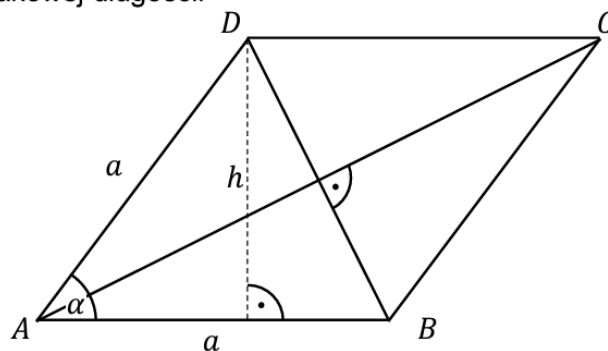
$$P = ah \quad P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \gamma$$



Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole P rombu:

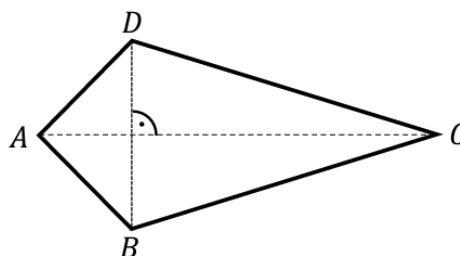
$$P = ah \quad P = a^2 \cdot \sin \alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid – czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole P deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



KARTA WZORÓW

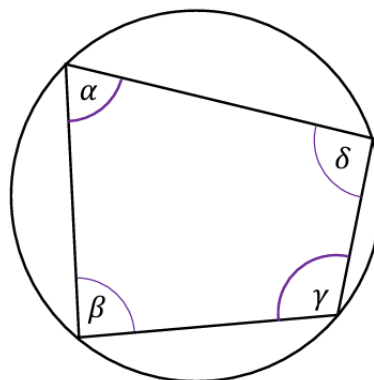
TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Okrąg opisany na czworokącie

Na czworokąt można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180° .

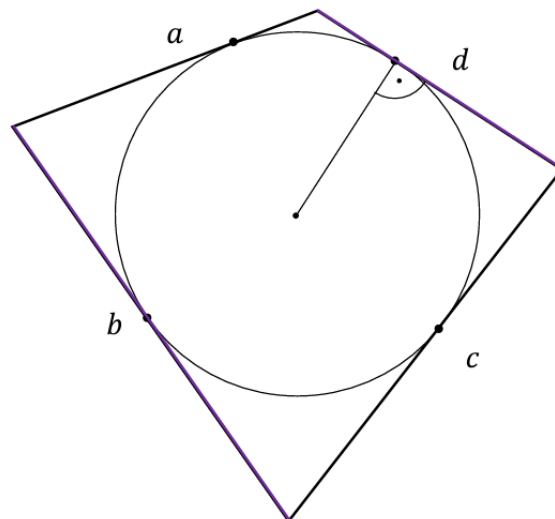
$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= \beta + \delta \\ \alpha + \gamma &= 180^\circ \quad \beta + \delta = 180^\circ\end{aligned}$$



- Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$



- Pola figur podobnych

Jeżeli figura $\mathcal{B}$ o polu $P_{\mathcal{B}}$ jest podobna do figury $\mathcal{A}$ o polu $P_{\mathcal{A}}$ (różnym od zera) w skali k , to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$$

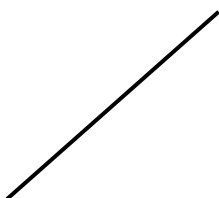
1

Prosta, półprosta, odcinek i kąty

PROSTA, PÓŁPROSTA, ODCINEK

Prosta

linia bez początku i końca



Półprosta

linia z jednej strony z początkiem (oznaczonym kropczką), z drugiej strony nieskończona



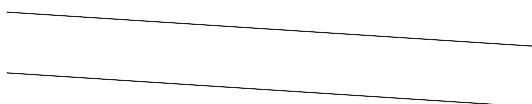
Odcinek

ma początek i koniec



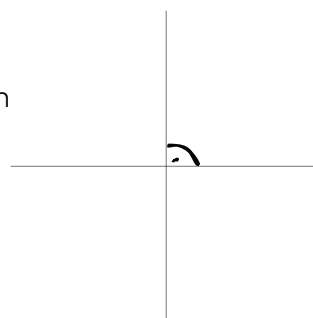
Proste równoległe

dwie proste, które nigdy się nie przecinają



Proste prostopadłe

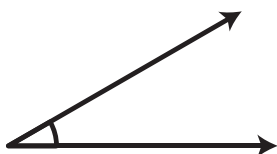
dwie proste, które przecinają się pod kątem prostym (90°)



KĄTY

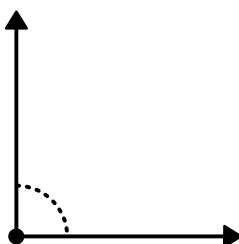
Kąt ostry

$< 90^\circ$



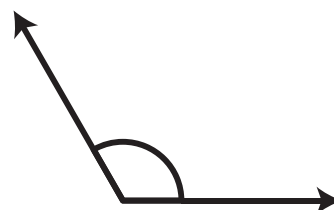
Kąt prosty

$= 90^\circ$



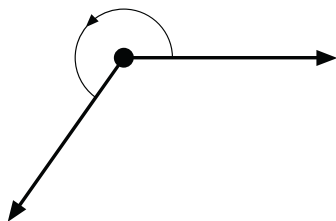
Kąt rozwarty

> 90 i < 180



Kąt wklęsły

>180 i <360



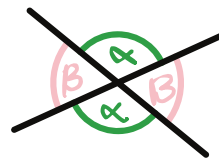
Kąt wypukły

≤ 180



Kąt wierzchołkowy

- dwa kąty ze wspólnym wierzchołkiem
- kąty naprzeciw siebie są równe



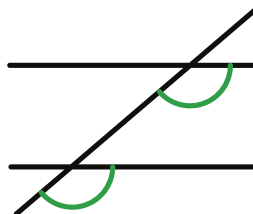
Kąt przyległy

- ich suma to 180°
- dwa kąty mające wspólne ramię



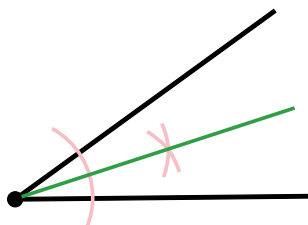
Kąty odpowiadające

- proste są równoległe i kolejna prosta je przecina
- leżą po tej samej stronie przecinającej prostej



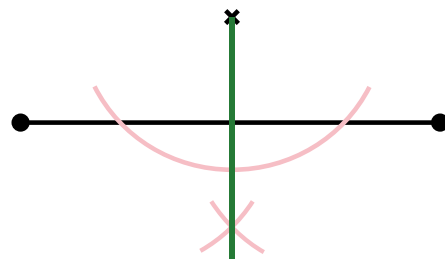
Dwusieczna

- linia dzieląca dowolny kąt w połowie (na dwie równe części)



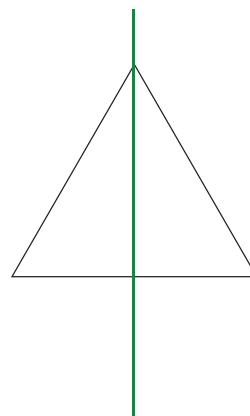
Symetralna

- prosta dzieli odcinek na pół (na dwie równe części)
- ta prosta jest prostopadła do odcinka



Środkowa

- odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.
- ta prosta jest prostopadła do tego przeciwległego boku



2

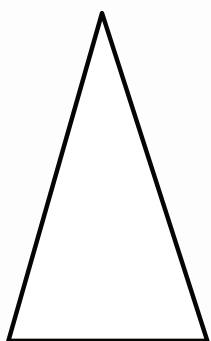
Trójkąty

KĄTY W TRÓJKĄCIE

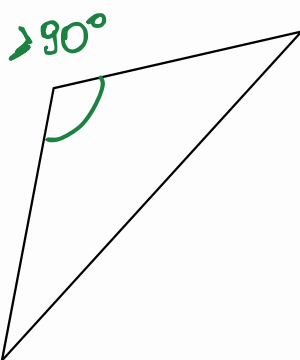
Suma kątów wewnętrznych w trójkącie zawsze jest równa 180 stopni. Trójkąt może mieć tylko jeden kąt rozwarty i tylko jeden kąt prosty.

TRÓJKĄTY I ICH RODZAJE

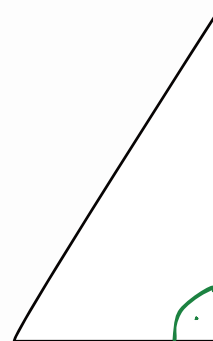
Trójkąty możemy podzielić na przykład ze względu na miary kątów:



Trójkąt ostrokątny



Trójkąt rozwartokątny

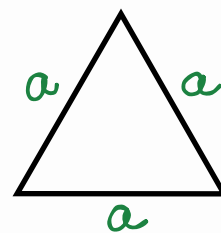


Trójkąt prostokątny

Oprócz tego możemy wyróżnić dwa szczególne rodzaje trójkątów:

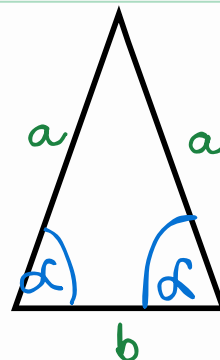
Trójkąt równoboczny:

- wszystkie boki tego trójkąta są równej długości.
- wszystkie jego kąty mają po 60°



Trójkąt równoramienny:

- dwa boki trójkąta są tej samej długości
- dwa kąty tego trójkąta mają taką samą wartość



WŁASNOŚCI TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO

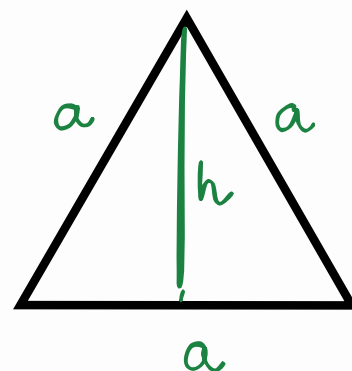
Jako że trójkąt równoboczny ma wszystkie boki tej samej długości (i każdy kąt równy jest 60 stopni), posiada także pewne charakterystyczne właściwości.

- Wysokość trójkąta możemy obliczyć z następującego wzoru.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- Istnieje także dodatkowy wzór na pole trójkąta równobocznego

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



PRZYKŁAD 1

Dany jest trójkąt, którego wszystkie boki mają po 4 cm. Oblicz jego pole.

Sposób 1

- Obliczamy wysokość trójkąta

$$a = 4$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

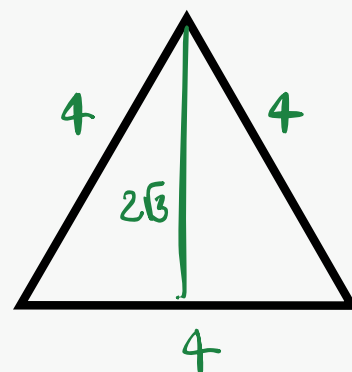
$$h = 2\sqrt{3}$$

- Wykorzystujemy wzór na pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

$$P = 4\sqrt{3}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}$$



Sposób 2

- Obliczamy pole trójkąt z nowo poznanego wzoru na pole trójkąta równobocznego, gdzie długość boku bez potrzeby wyliczania wysokości starczy

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$a = 4$$

- wiemy, że nasz bok ma 4 cm

- podstawiamy pod wzorek

$$P = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = 4\sqrt{3}$$

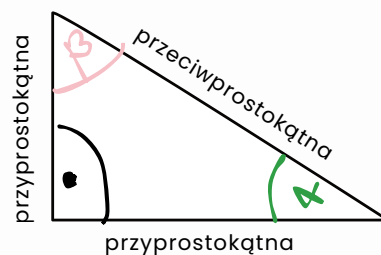
WŁASNOŚCI TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO

Z trójkątem prostokątnym zapoznaliśmy się blisko w dziale Trygonometria. Teraz jednak zwróćmy uwagę na najważniejszej właściwości tego trójkąta

- ✓ Suma kątów ostrych jest równa 90°
- ✓ Do obliczenia brakującego boku możemy wykorzystać **Twierdzenie Pitagorasa**

Wzorek - Twierdzenie Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \text{bo} \\ 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

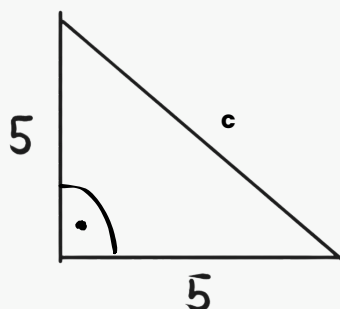
PRZYKŁAD 1

Oblicz miarę trzeciego boku trójkąta wiedząc, że przyprostokątne są równe i mają 5 cm.

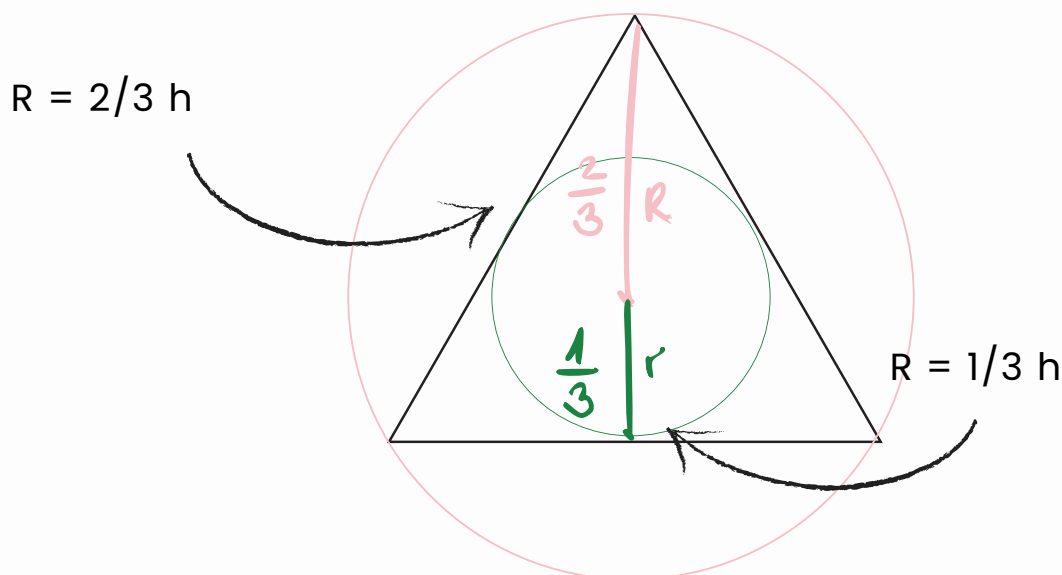
1. Trójkąt jest prostokątny
2. Masz obliczyć długość trzeciego brakującego boku

→ Wiedz, że kroi się Pitagoras

$$\begin{aligned} 5^2 + 5^2 &= c^2 \\ 50 &= c^2 \\ c &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$



TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY WPISANY W OKRĄG ORAZ OPISANY NA TRÓJKĄCIE

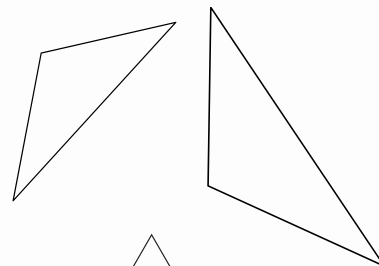


PODOBIENSTWO TRÓJKĄTÓW

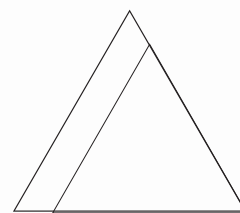
Trójkąty podobne to trójkąty, które mają takie same kąty, ale różnią się wielkością. Oznacza to, że ich odpowiednie boki są proporcjonalne, czyli stosunki długości odpowiadających sobie boków są równe.

Dwa trójkąty są podobne, jeśli spełniają jeden z poniższych warunków:

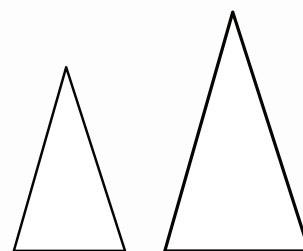
KK: (Kąt-Kąt) Dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta.



BKB: (Bok-bok-bok) Stosunki długości wszystkich trzech odpowiednich boków są równe.



BKB: (Bok-kąt-bok) Stosunki dwóch odpowiednich boków są równe, a kąty między tymi bokami są takie same.



TRÓJKĄTY PRZYSTAJĄCE

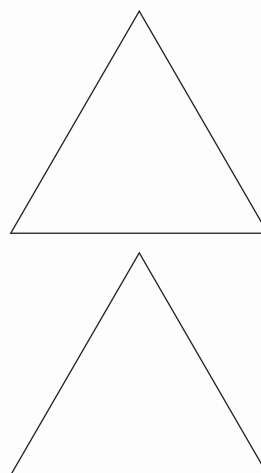
Trójkąty są przystające, jeśli mają identyczny kształt i rozmiar, czyli odpowiadające sobie boki są równe oraz odpowiadające sobie kąty są równe.

Aby sprawdzić, czy trójkąty są przystające, wystarczy spełnić jeden z następujących warunków:

bok-bok-bok: Wszystkie trzy boki jednego trójkąta są równe trzem bokom drugiego trójkąta.

bok-kąt-bok: Dwa boki i kąt między nimi w jednym trójkącie są równe odpowiednim elementom w drugim trójkącie.

kąt-bok-kąt: Dwa kąty i bok między nimi w jednym trójkącie są równe odpowiednim elementom w drugim trójkącie.



TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ KĄTA

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie mówi, że:

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do długości dwóch pozostałych boków.

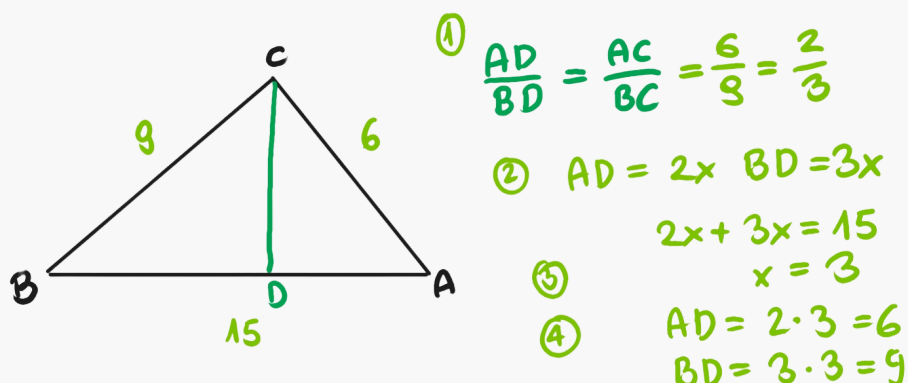
Jeśli w trójkącie ABC, dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie D, to:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

- Odcinek AD jest proporcjonalny do boku AC
- Odcinek BD jest proporcjonalny do boku BC

PRZYKŁAD 1

W trójkącie ABC Bok AB=6, AC=9, Dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie D. Długość BC=10. Chcemy znaleźć długości odcinków BD i DC



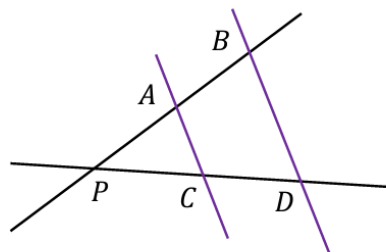
TWIERDZENIE TALESA

Twierdzenie Talesa mówi, że:

Jeśli ramiona kąta są przecięte przez dwie równoległe proste, to odcinki wyznaczone na jednym ramieniu są proporcjonalne do odpowiadających im odcinków na drugim ramieniu.

$$\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$$

- Odcinek PA i PC są proporcjonalne
- Odcinek AB i CD są proporcjonalne



3

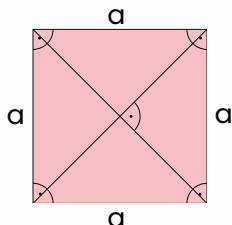
Czworokąty

PODSTAWOWE CZWOROKĄTY

Czworokąty można podzielić na różne typy, w zależności od długości boków, miar kątów czy symetrii. Najbardziej znane rodzaje czworokątów to kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez i deltoid. Każdy z tych typów ma unikalne właściwości. **Suma kątów w czworokącie wynosi zawsze 360 stopni.**

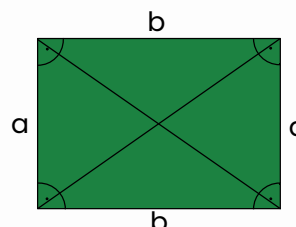
Kwadrat

- wszystkie boki są takiej samej długości
- każdy kąt ma 90 stopni
- przekątne są równe
- przekątne przecinają się pod kątem prostym (prostopadłe)
- POLE = $a * a$



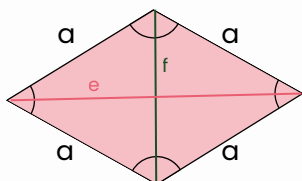
Prostokąt

- przeciwnie boki są takiej samej długości
- każdy kąt ma 90 stopni
- przekątne są równe, ale nie są prostopadłe
- POLE = $a * b$



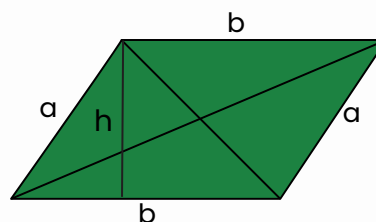
Romb

- wszystkie boki są takiej samej długości
- kąty na przeciwko są sobie równe
- przekątne przecinają się pod kątem prostym (prostopadłe)
- przekątne przecinają się w połowie
- POLE = $(e * f) / 2$



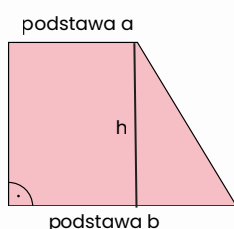
Równoległobok

- przeciwnie boki są takiej samej długości i są równoległe
- przekątne są różnej długości i nie są prostopadłe
- POLE = $a * h$



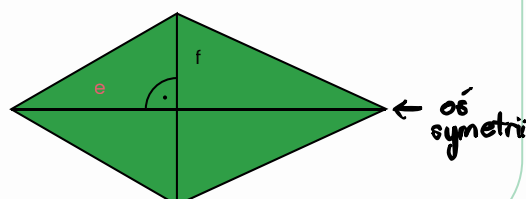
Trapez

- jedna para boków (podstawy) jest równoległa
- POLE = $1/2 * (a+b) * h$



Deltoid

- dwie pary boków są takiej samej
- przekątne różnej długości, przecinają się pod kątem prostym
- jedna z przekątnych jest osią symetrii
- POLE = $(e * f) / 2$



4

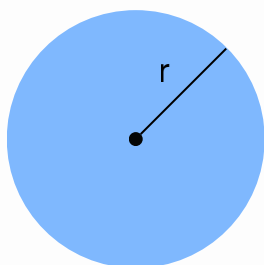
Koło i okrąg

KOŁO VS OKRĄG

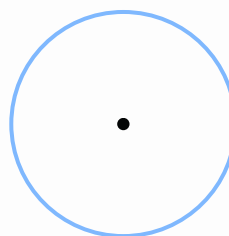
Koło to figura geometryczna złożona z punktów leżących w odległości nie większej niż promień od środka. Jego podstawowe elementy to:

Okrąg to zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, które są oddalone o tę samą odległość (promień) od danego punktu (środką okręgu) albo inaczej mówiąc jest to linia, która jest zawsze tak samo daleko od jednego punktu w środku.

KOŁO

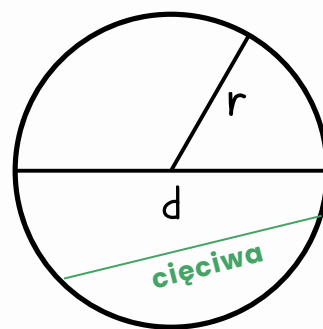


OKRĄG



PODSTAWOWE WŁAŚNOŚCI KOŁA I OKRĘGU

- ✓ Środek – punkt centralny.
- ✓ Promień (r) – odcinek od środka do obwodu
- ✓ Średnica (d) – odcinek przechodzący przez środek
- ✓ Cięciwa – odcinek łączący dwa punkty leżące na okręgu
- ✓ Obwód – długość linii otaczającej koło
- ✓ Pole – powierzchnia wewnątrz koła



OBWÓD

$$L = 2\pi r$$

POLE

$$P = \pi r^2$$

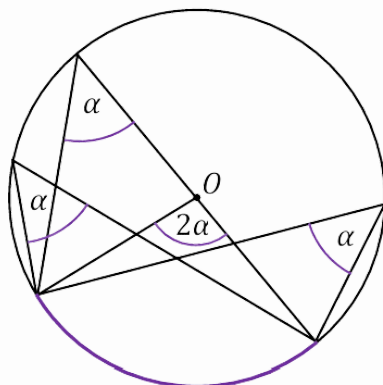
Promień ma 4 cm. Wylicz obwód i pole

$$L = 2 \cdot \pi \cdot 4 \quad L = 8\pi$$

$$P = \pi \cdot 4^2 \quad P = 16\pi$$

KĄTY W OKRĘGU

Kąt wpisany (α) w okręgu to kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona są cięciwami okręgu. Miara kąta wpisanego jest równa połowie miary **kąta środkowego (2α)**, opartego na tym samym łuku.



PRZYKŁAD

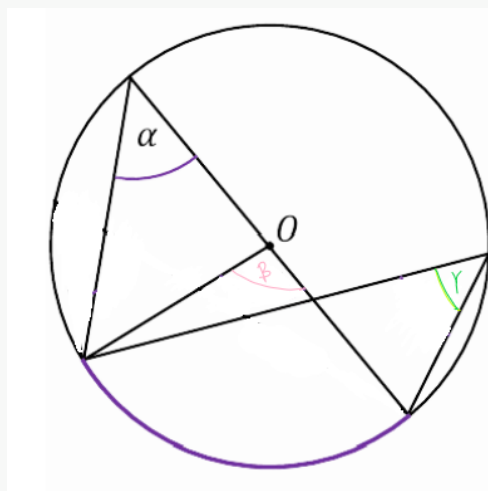
W podanym okręgu miara kąta α wynosi 30° podaj miary kątów β i γ .

Krok 1: miara kąta β .

Zauważamy, że wszystkie trzy kąty oparte są na tym samym łuku a kąt α jest kątem wpisanym, dlatego też wiemy że β jako kąt środkowy będzie dwa razy większa niż kąt α czyli jego miara wynosi 60° .

Krok 2: miara kąta

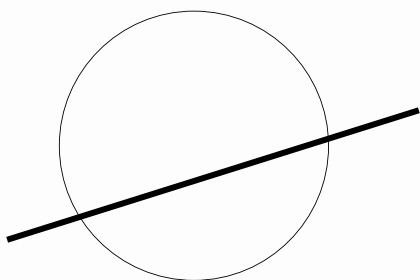
Analogicznie z kątem γ skoro jest oparty na tym samym łuku co α oraz także jest kątem wpisanym znaczy, że będzie miał taką samą miarę jak kąt α czyli 30°



SIECZNA I STYCZNA

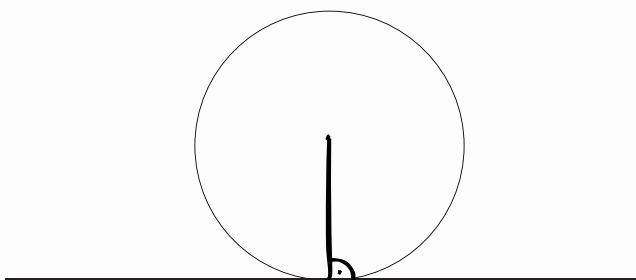
Sieczna

- prosta, która przecina okrąg w dwóch punktach



Styczna

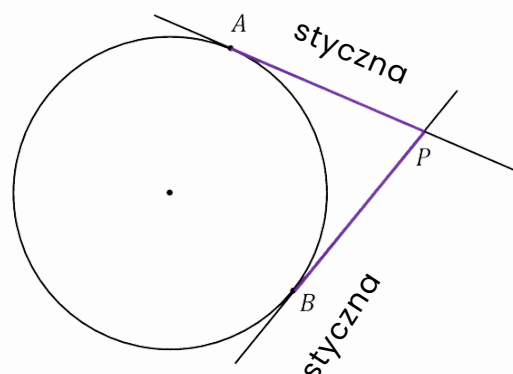
- prosta, która ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny i jest do niego prostopadła w punkcie styczności.



TWIERDZENIE O ODCINKACH STYCZNYCH

Jeśli A i B są styczne do okręgu i przecinają się w punkcie P to $|PA|$ i $|PB|$ mają taką samą długość

- ✓ A i B to punkty styczności
- ✓ styczne przecinają się w punkcie P
- ✓ **to odcinki $|PA| = |PB|$**



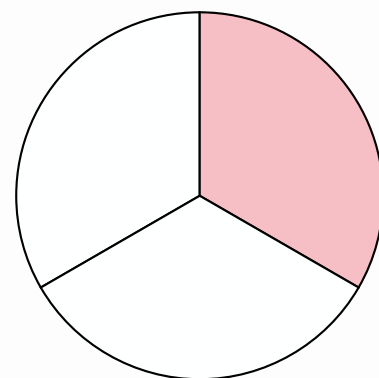
WYCINEK KOŁA

Wycinek koła to fragment koła, który wygląda jak "kawałek pizzy". Jest ograniczony dwoma liniami (promieniami) wychodzącymi ze środka koła i łukiem obwodu. Jego pole możemy obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

A długość łuku:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

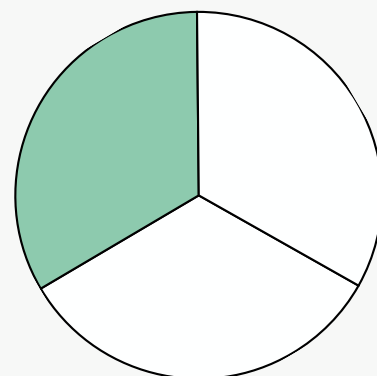


PRZYKŁAD DLA CIEBIE

Wiedząc że długość łuku (L) jest równa 4π , promień (r) = 6. Oblicz miarę kąta a następnie oblicz pole wycinka koła.

Krok 1: Oblicz miarę kąta

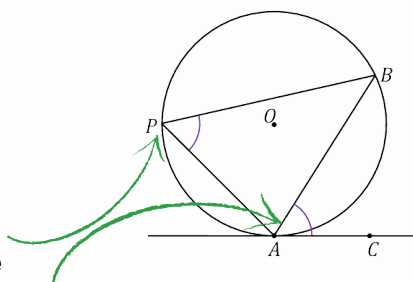
Krok 2: Oblicz pole wycinka koła.



TWIERDZENIE O KĄCIE MIĘDZY STYCZNĄ I CIĘCIWĄ

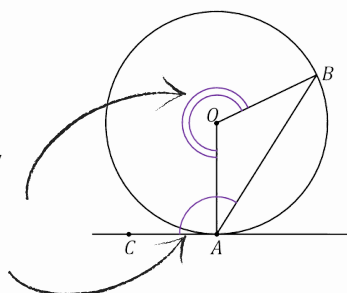
Kąt między styczną a cięciwą jest połową kąta środkowego, który ma ten sam łuk. Aby to zrozumieć rozważymy trzy przypadki zawarte w kartach zbiorów

Kąty są takie same



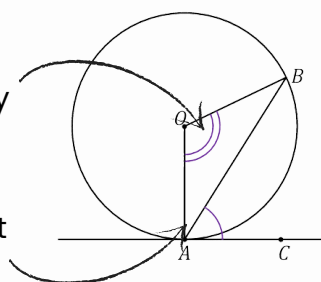
Ten kąt jest 2 razy
większy niż

ten kąt



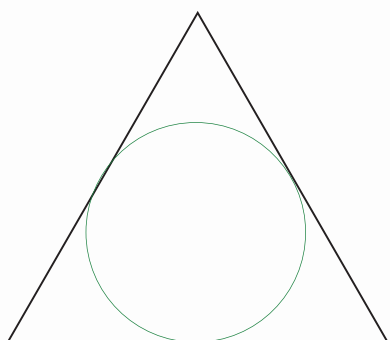
Ten kąt jest 2 razy
większy niż

ten kąt

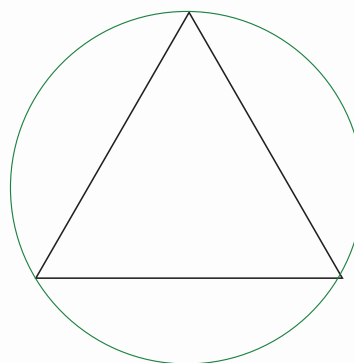


OKRĄG WPISANY W FIGURĘ VS OKRĄG OPISANY NA FIGURZE

Bardzo często podane wyrażenia bierzemy za jednoznaczne i nie zauważamy różnicy, ta jednak występuje.



Okrąg WPISANY W trójkąt



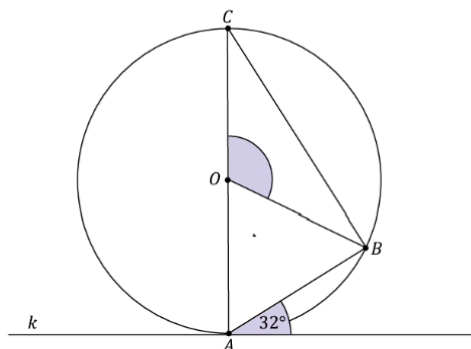
Okrąg OPISANY NA trójkącie

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Punkty A , B oraz C leżą na okręgu o środku w punkcie O . Prosta k jest styczna do tego okręgu w punkcie A i tworzy z cięciwą AB kąt o mierze 32° . Ponadto odcinek AC jest średnicą tego okręgu (zobacz rysunek).



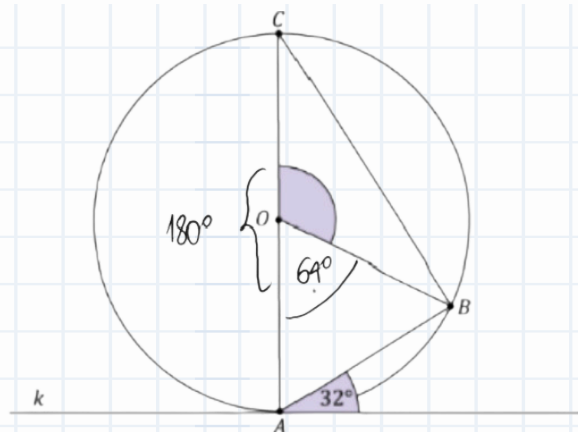
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta rozwartego BOC jest równa

- A. 148° B. 116° C. 154° D. 122°

1. Zgodnie z twierdzeniem o kącie między styczną a cięciwą wiemy że $\angle AOB = 32^\circ \cdot 2 = 64^\circ$

2. $\angle AOB$ i $\angle BOC$ są przystające dlatego $180^\circ - 64^\circ = \underline{116^\circ}$



Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 2.

Koło ma promień równy 3.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obwód wycinka tego koła o kącie środkowym 30° jest równy

A. $\frac{3}{4}\pi$

B. $\frac{1}{2}\pi$

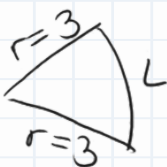
C. $\frac{3}{4}\pi + 6$

D. $\frac{1}{2}\pi + 6$

1. Zastanawiamy się z czego składa się obwód odcinka

2. Obliczamy długość łuku

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$



$$3. L = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3 = \frac{1}{2}\pi$$

$$4. Obw = 3 + 3 + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + 6$$

Zadanie 3.

W okręgu O kąt środkowy β oraz kąt wpisany α są oparte na tym samym łuku. Kąt β ma miarę o 40° większą od kąta α .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta β jest równa

A. 40°

B. 80°

C. 100°

D. 120°

1. Wiemy że

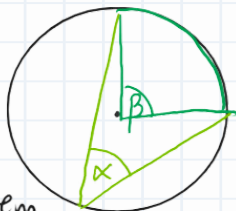
$$\alpha + 40^\circ = \beta$$

a także

$$2\alpha = \beta$$

ponieważ β jest kątem

środkowym a kąt α wpisanym



2. Skoro

$$\alpha + \alpha = \beta$$

$$\alpha + 40^\circ = \beta$$

to

$$\alpha = 40^\circ$$

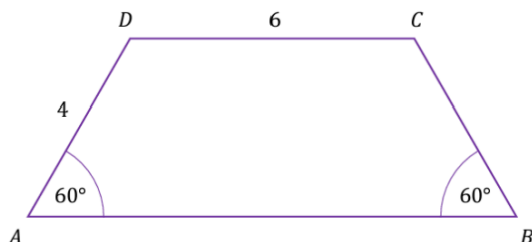
$$\beta = 80^\circ$$

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

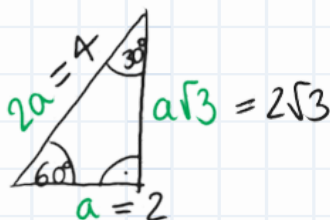
Zadanie 4.

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym podstawa CD ma długość 6, ramię AD ma długość 4, a kąty BAD oraz ABC mają miarę 60° (zobacz rysunek).

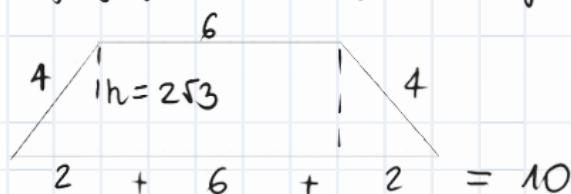


Oblicz pole tego trapezu. Zapisz obliczenia.

1. Zauważamy wyjątkowy trójkąt



2. Patrzymy jakie dane już mamy



3. Wzór na pole trapezu $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

4. Podstawiamy $P = \frac{16}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \underline{\underline{16\sqrt{3}}}$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



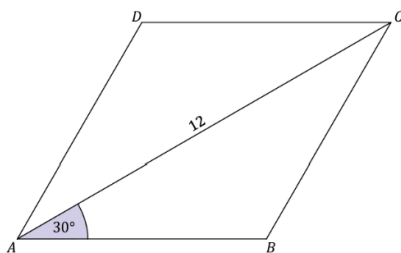
Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
też wydrukować



Zadanie 1.

W rombie $ABCD$ dłuższa przekątna AC ma długość 12 i tworzy z bokiem AB kąt o mierze 30° (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole rombu $ABCD$ jest równe

A. 24

B. 36

C. $24\sqrt{3}$

D. $36\sqrt{2}$



Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 2.

W trójkącie ABC długość boku AC jest równa 3, a długość boku BC jest równa 4. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stosunek $|AD| : |DB|$ jest równy

A. 4 : 3

B. 4 : 7

C. 3 : 4

D. 3 : 7

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 3.



Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!

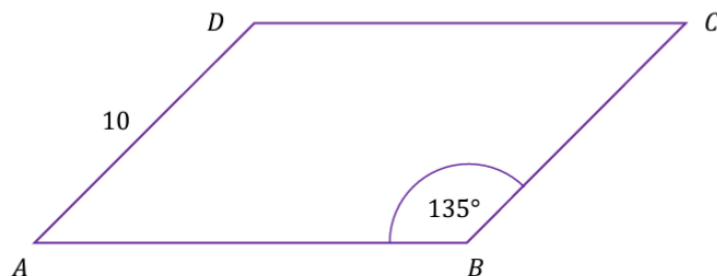


TuMatura



Kanał Stuencki

Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe $40\sqrt{6}$. Bok AD tego równoległoboku ma długość 10, a kąt ABC równoległoboku ma miarę 135° (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

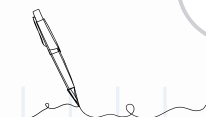
Długość boku AB jest równa

A. $8\sqrt{3}$

B. $8\sqrt{2}$

C. $16\sqrt{2}$

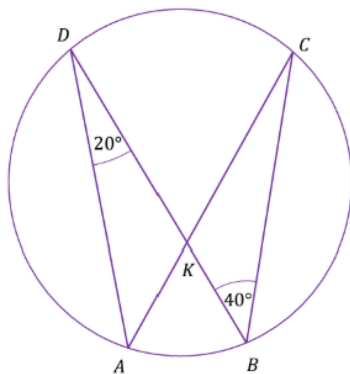
D. $16\sqrt{3}$



Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 4.

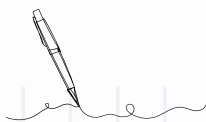
Na łukach AB i CD okręgu są oparte kąty wpisane ADB i DBC , takie, że $|\angle ADB| = 20^\circ$ i $|\angle DBC| = 40^\circ$ (zobacz rysunek). Cięciwy AC i BD przecinają się w punkcie K .



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta DKC jest równa

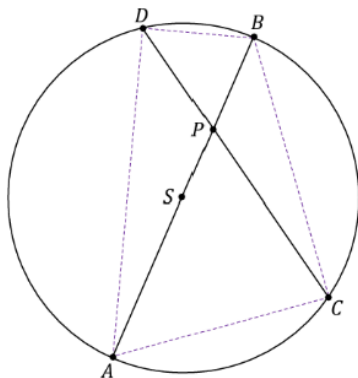
- A. 80° B. 60° C. 50° D. 40°



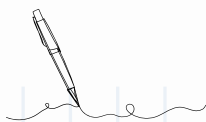
Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 5.

Dany jest okrąg O o środku w punkcie S . Średnica AB tego okręgu przecina cięciwę CD w punkcie P (zobacz rysunek). Ponadto: $|PB| = 4$, $|PC| = 8$ oraz $|PD| = 5$.



Oblicz promień okręgu O . Zapisz obliczenia.



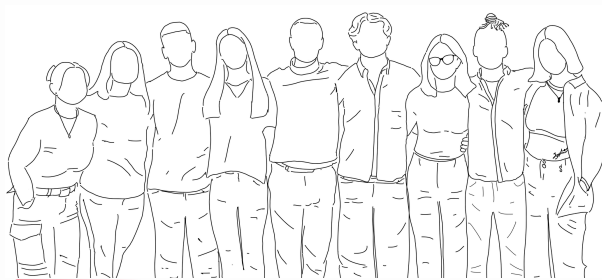
wspieramy po STUDENTCKU



praktyka



nauka



przedsię
biorczość



inicjatywa

Dziękujemy za wspólną naukę. Mamy nadzieję, że zdobywanie wiedzy było dla Ciebie przyjemne. Do zobaczenia na studiach!

Powodzenia!

ŚLEDŹ DALEJ!



www.tumatura.pl



@tuMATURA



@tumatura

Wydane przez Fundację Kanał Studencki.
Wszelkie prawa zastrzeżone.



I DOŁĄCZ DO
STUDENCKIEJ
SPOŁECZNOŚCI!



@kanalstudencki



@kanal.studencki



www.kanalstudencki.pl



kontakt@kanalstudencki.pl

Spis Treści

Czytasz notatki stworzone przez **Fundację Kanał Studencki** w ramach projektu **Tumatura**.

1 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE – ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.

