

$$a^0 = 1$$



Liczby rzeczywiste

$$\sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{x}$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$



Bezpłatne notatki
i zadania maturalne

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

POZIOM PODSTAWOWY

Zgodnie z nową formułą 2023

$$a^m a^n = a^{m+n}$$



*Konkursy i nagrody na
naszym Discordzie!*

www.tumatura.pl

Spis treści

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

1	O nas, projekt <u>TuMatura</u>	str 3
2	Wymogi CKE	str 4
3	Liczby rzeczywiste	str 5-36
	Potęgi i pierwiastki	str 5-14
	Logarytmy	str 15-23
	Wartości bezwzględne	str 24-30
	Przedziały liczbowe	str 31-33
	Zbiory	str 34-36
	Podsumowanie:)	str 37

Psss... sprawdź resztę naszych notatek na stronie TuMatura.pl

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE - ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.



Obniżamy koszt przygotowania się do matury w Polsce

Czytasz notatki stworzone przez **Fundację Kanał Studencki** w ramach projektu **Tumatura**.

Jeśli uważasz nasze materiały za wartościowe i lubisz uczyć się zespołowo – **dołącz dalej do naszej społeczności** – wejdź na discorda i ucz się wspólnie ze znajomymi.

Dołącz do społeczności

Ucz się do matury z innymi uczniami. Wspierajmy się razem:)



Przejrzysta teoria



Korzystasz z wersji wydrukowanej?
Zeskanuj kod QR i wejdź na naszego discorda!

Studenckie typy i rady

Zadania maturalne

Wytłumaczone karty wzorów



Dołącz



Oglądaj



Obserwuj



Obserwuj

CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE



STUDENCKI TIP OD OLI

Zastanów się, co już umiesz, a co jeszcze wymaga przećwiczenia. Warto zaglądać tu raz na jakiś czas – wtedy ładnie widać progres!

UCZEŃ...

- 1 ☐ **Wykonuje działania**
(dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.
- 2 ☐ **Przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia, nie trudniejsze niż:**
 - dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
 - dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.
- 3 ☐ **Stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia**
W tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych.
- 4 ☐ **Stosuje związki pierwiastkowania z potęgowaniem**
oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.
- 5 ☐ **Stosuje własności monotoniczności potęgowania**
w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$,
zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$.
- 6 ☐ **Posługuje się pojęciem przedziału liczbowego**
Zaznacza przedziały na osi liczbowej.
- 7 ☐ **Stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej**
Rozwiązuje równania i nierówności jak: $|x+4| = 5$, $|x-2| < 3$, $|x+3| \geq 4$
- 8 ☐ **Wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych**
W tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów.
- 9 ☐ **Stosuje związki logarytmowania z potęgowaniem**
Posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

1

Potęgi i pierwiastki

DEFINICJA POTĘGI

CZYM SĄ POTĘGI I DO CZEGO SIĘ PRZYDAJĄ?

- Potęgowanie to działanie matematyczne oznaczające wielokrotne mnożenie elementu przez siebie
- Wprowadzone po to, aby ułatwić i skrócić zapis wielokrotnego mnożenia (choć maturzystom spędza czasem sen z powiek)

PRZYKŁAD 1. Po co mnożyć 2 pięciokrotnie, jeśli możemy po prostu napisać:

$$\underset{1}{2} \cdot \underset{2}{2} \cdot \underset{3}{2} \cdot \underset{4}{2} \cdot \underset{5}{2}$$

Mnożymy 2 pięciokrotnie przez siebie

$$2^5$$

Czyli podnosimy 2 do potęgi 5



$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Obydwa zapisy znaczą to samo, ale jeden jest krótszy;)

Dobra, potęgowanie już mamy w małym palcu. To jak z tym pierwiastkowaniem?

DEFINICJA PIERWIASTKA

CO TO SĄ PIERWIASTKI?

- Pierwiastkowanie to działanie odwrotne do potęgowania. Proste prawda?
- Jaka liczba podniesiona do potęgi równej stopniu pierwiastka da nam liczbę spod pierwiastka?
- Wynik pierwiastka parzystego stopnia, jak i liczba pod pierwiastkiem, jest zawsze liczbą dodatnią

PRZYKŁAD 2. Jaka liczba podniesiona do kwadratu da nam 16? Dowiedzmy się!

$$\sqrt{16} = ?$$

pierwiastek bez liczby to pierwiastek II stopnia

$$4^2 = 16$$

4^2 daje 16, więc właśnie 4 to odpowiedź!



$$\sqrt{16} = 4$$



STUDENCKI TIP OD NATI

Pamiętaj, nie ma co uczyć się definicji na pamięć. Ważne, żeby rozumieć i umieć zastosować!

Czas poznać wzory!

NAZWA

WZÓR

PRZYKŁAD

$$a = 2 \quad b = 9 \quad m = 7 \quad n = 4$$

- MNOŻENIE POTĘG
O TYCH SAMYCH
PODSTAWACH

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2^7 \cdot 2^4 = 2^{7+4}$$

- MNOŻENIE POTĘG
O RÓŻNYCH
PODSTAWACH

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$2^4 \cdot 9^4 = (2 \cdot 9)^4$$

- DZIELENIE POTĘG
O TYCH SAMYCH
PODSTAWACH

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4}$$

- DZIELENIE POTĘG
O RÓŻNYCH
PODSTAWACH

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{2^4}{9^4} = \left(\frac{2}{9}\right)^4$$

- POTĘGA POTĘGI

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(2^7)^4 = 2^{7 \cdot 4}$$

- ZAMIANA
UŁAMKA NA
POTĘGĘ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

- ZAMIANA
UŁAMKA NA
POTĘGĘ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

- ZAMIANA
UŁAMKA
NIEWYMIERNEGO

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$2^{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^7}}$$

(dla $a \neq 0$)

- ZAMIANA
PIERWIASTKA NA
POTĘGĘ

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$2^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{2^7}$$

(dla $n > 0$)

(dla $a \geq 0$)

- INNE

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$0^n = 0$$

NAZWA	WZÓR	PRZYKŁAD
MNOŻENIE PIERWIĄTKÓW JEDNEGO STOPNIA	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$a = 2 \quad b = 9 \quad m = 7 \quad n = 4$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{2 \cdot 9}$
MNOŻENIE PIERWIĄTKÓW O TEJ SAMEJ PODSTAWIE	$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{7} + \frac{1}{4}}$
PIERWIASTEK I POTĘGA JEDNEGO STOPNIA	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$(\sqrt[4]{2})^4 = 2$
DZIELENIE PIERWIĄTKÓW JEDNEGO STOPNIA	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}}$
PIERWIASTEK DRUGIEGO STOPNIA Z KWADRATU	$\sqrt{a^2} = a $	$\sqrt{2^2} = 2 = 2$



STUDENCKI TIP OD OLI

Wzorki wyobraź sobie jako ramki na zdjęcia. Zamiast zdjęć wkładasz do nich odpowiednie liczby:)

$$\boxed{}^{-\boxed{m}} = \frac{1}{\boxed{a}^{\boxed{m}}}$$

$$\boxed{a}^{\boxed{m}} = \boxed{a}^{\boxed{m}} \sqrt{}$$

$$\boxed{a}^{\boxed{m}} = \boxed{a}^{\boxed{m}} \sqrt{}$$

$$\boxed{a}^{\boxed{m}} = \frac{1}{\boxed{a}^{\boxed{m}}}$$

$$\boxed{2}^{-\boxed{4}} = \frac{1}{\boxed{2}^{\boxed{4}}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Jak poradzić sobie z potęgami i pierwiastkami na maturze?

Wizualne rozpisanie wzoru pomaga niektórym go lepiej zrozumieć.

Zamiast cokolwiek liczyć, zmieniamy ułożenie "ramek" i otrzymujemy wynik.

Potrąfisz rozpoznać, jakie wzory kryją się pod pozostałymi ramkami?



1

KORZYSTAJ Z KARTY WZORÓW

- Patrzysz na zadanie i nawet nie wiesz jak zacząć? **Pierwsza zasada: przeanalizuj wzory na spokojnie, a znajdziesz odpowiedź**
- Jeśli masz trudność w wizualizacji wzorów na literkach, **zapisz przykłady liczbowe oraz nazwy** w swojej karcie wzorów i ucz się z niej korzystać

2

CZTERY PRZYKAZANIA KOMBINOWANIA

1. WIĘKSZOŚĆ ZADAŃ OPIERA SIĘ NA POTĘGACH LICZB 2, 3, I 5

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
1	2	4	8	16	32

- **Wypisz je i miej pod ręką**
- Korzystaj z nich przy pierwiastkach, zamianie liczb na potęgę i odwrotnie

2. KAŻDY PIERWIASTEK DA SIĘ ZAMIENIĆ NA POTĘGĘ

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

- Pierwiastki często stresują
- Nie ma ich w karcie wzorów
- **Wzór na zamianę na potęgę jest w karcie;**

3. UŁAMKÓW TEŻ DA SIĘ POZBYĆ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

- Również ułamków możemy się pozbyć odpowiednimi wzorami z karty

4. DUŻĄ LICZBĘ ROZBIJ NA WIELOKROTNY ILOCZYN

szukam wielokrotnych iloczynów, np. liczb 2 i 5:	$200 = 4 \cdot 50$
	$200 = 2^2 \cdot 2 \cdot 25$
	$200 = 2^3 \cdot 5 \cdot 5$
dostaję potęgi liczb 2 i 5:	$200 = 2^3 \cdot 5^2$

- Przydatne, gdy nie jesteś w stanie wyciągnąć pierwiastka z liczby
- Zrobisz to zwykłym dzieleniem lub rozkładem na czynniki pierwsze

3

NIE BÓJ SIĘ ZADAŃ!

- **Próbuj, kombinuj i pamiętaj – PRAKTYKA CZYNI MISTRZA!**
- Korzystaj przede wszystkim z karty wzorów

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ? 2. POTĘGI I PIERWIASTKI

- Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a definiujemy jej n -tą potęgę:

Definicja
pierwiastkowania -
ją również znamy!

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Definicja potęgowania -
to już znamy :)

- Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Pod pierwiastkiem kwadratowym
mamy drugą potęgę - wynik
zawsze liczbą dodatnią!

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

dziedzina	
- dla $a \neq 0$:	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$
- dla $a \geq 0$:	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- dla $a > 0$:	$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

**Dopisz wzory, których
brakuje Tobie w karcie**

Przykłady użycia tych wzorów
znajdziesz na stronie 9

- Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & (a^r)^s &= a^{r \cdot s} & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r & \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

Przykłady zadań maturalnych

Chcesz więcej rozwiązań?
Zapraszamy na nasze laby :)

Zadanie 1.

Liczba $\sqrt[3]{-\frac{27}{16}} \cdot \sqrt[3]{2}$ jest równa

A. $(-\frac{3}{2})$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $(-\frac{2}{3})$

$$\sqrt[3]{-\frac{27}{16}} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{-\frac{27}{16} \cdot 2} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8} \cdot \frac{2}{1}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8} \cdot 1} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$$

Co teraz? Co podniesione do 3 potęgi da 27? A w 8?

Użyjmy kwadracików: $\square^3 = 27 \rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\square^3 = 8 \rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $\boxed{3}^3 = 27$ $\boxed{2}^3 = 8$

Zadanie 2.

Liczba $3^{2+\frac{1}{4}}$ jest równa

A. $3^2 \cdot \sqrt[4]{3}$

B. $\sqrt[4]{3^3}$

C. $3^2 + \sqrt[4]{3}$

D. $3^2 + \sqrt{3^4}$

① Idę do korty wzorów: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

② Przechodzę z literki na liczby i zadanie:

$$a=3 \quad r=2 \quad s=\frac{1}{4} \Rightarrow 3^{2+\frac{1}{4}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3^2 \cdot \sqrt[4]{3}$$

③ Korzystam z wzoru: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$



Zadanie 6.

Liczba $\frac{2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 4^0}{2^{-1} \cdot 3^{-4} \cdot 4^{-1}}$ jest równa

A. 1

B. 3

C. 24

D. 48



$$\frac{2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 4^0}{2^{-1} \cdot 3^{-4} \cdot 4^{-1}} = 2^{(-3-(-1))} \cdot 3^{(-3-(-4))} \cdot 4^{(0-(-1))} =$$

$$= 2^{-3+1} \cdot 3^{-3+4} \cdot 4^1 = 2^{-2} \cdot 3^1 \cdot 4^1 = \frac{3 \cdot 4}{2^2} = \frac{12}{4} = 3$$

Kreska ułamkowa = Dzielenie



Zadanie 4.

Liczba $\frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{36^{10}}$ jest równa

A. 6^{70}

B. 6^{45}

C. $2^{30} \cdot 3^{20}$

D. $2^{10} \cdot 3^{20}$



$$\frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{36^{10}} = \frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{(2^2 \cdot 3^2)^{10}} = \frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{(2^2)^{10} \cdot (3^2)^{10}} = \frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{2^{20} \cdot 3^{20}} =$$

$$= 2^{(50-20)} \cdot 3^{(40-20)} = 2^{30} \cdot 3^{20}$$

$$36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2$$

Pozbywam się
dużej liczby

Zamieniam dzielenie na
odejmowanie potęg

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Zadanka dla Ciebie!



Zadanie 1.

Liczba $100^5 \cdot (0,1)^{-6}$ jest równa

A. 10^{13}

B. 10^{16}

C. 10^{-1}

D. 10^{-30}



Zadanie 2.

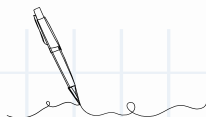
Liczba $\frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{36^{10}}$ jest równa

A. 6^{70}

B. 6^{45}

C. $2^{30} \cdot 3^{20}$

D. $2^{10} \cdot 3^{20}$



 Zadanie 3.

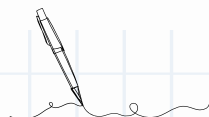
Liczba $\sqrt[3]{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{81}{56}}$ jest równa

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{3}{2\sqrt[3]{21}}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{9}{4}$



$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{81}{56}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{3}_2} \cdot \frac{27}{\cancel{56}_8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3^3}{2^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3^{3 \cdot \frac{1}{3}}}{2^{3 \cdot \frac{1}{3}}}\right) = \frac{3}{2}$$

 Zadanie 4.

Liczba $5^8 \cdot 16^{-2}$ jest równa

A. $\left(\frac{5}{2}\right)^8$

B. $\frac{5}{2}$

C. 10^8

D. 10





Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



Kanał Stuencki



Zadanie 5.

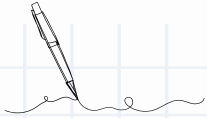
Liczba $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$ jest równa

A. $\sqrt[3]{52}$

B. 3

C. $2\sqrt[3]{2}$

D. 2



$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54} &= (8 \cdot 6)^{\frac{1}{3}} - (2)^{\frac{1}{3}} = (3^3 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} - (2^{\frac{1}{3}}) = \\ &= (3^{3 \cdot \frac{1}{3}}) (2^{\frac{1}{3}}) - (2^{\frac{1}{3}}) = \\ &= 2^{\frac{1}{3}} (3 - 1) = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2 = 2 \cdot \sqrt[3]{2}\end{aligned}$$



Zadanie 6.

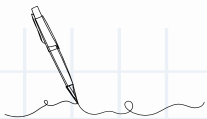
Dla każdej dodatniej liczby a iloraz $\frac{a^{-2,6}}{a^{1,3}}$ jest równy

A. $a^{-3,9}$

B. a^{-2}

C. $a^{-1,3}$

D. $a^{1,3}$



2

Logarytmy



DEFINICJA LOGARYTMU

CZYM SĄ LOGARYTMY?

- Logarytm to wykładnik potęgi (potęga), do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b

założenie: $a > 0 \quad a \neq 1 \quad b > 0$

PODSTAWA LOGARYTMU

Do jakiej potęgi należy ją podnieść...

$$\log_a b = c$$

LICZBA
LOGARYTMOWANA

...aby otrzymać tę liczbę?

WYKŁADNIK POTĘGI

Do tej potęgi należy podnieść a , by mieć b

To jak zamienić logarytm na potęgowanie?

$$\log_a b = c \quad \rightarrow \quad a^c = b$$

PRZYKŁAD 2. Do jakiej potęgi należy podnieść 4, aby otrzymać 16?

$$\log_4 16 = ? \quad 4^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \log_4 16 = 2$$

Zamieńmy logarytm na potęgę – tak łatwiej dojść do rozwiązania

4^2 daje 16, więc właśnie 2 to odpowiedź!



STUDENCKI TIP OD NATI

Nie bój się logarytmów, staraj się wyobrażać je jako inny zapis potęgowania!

Czas poznać wzory!

NAZWA

WZÓR

PRZYKŁAD

założenie: $a = 5$ $b = 2$ $c = 8$ $p = 3$

— DODAWANIE
LOGARYTMÓW - TE
SAME PODSTAWY!

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

$$\log_5 2 + \log_5 c = \log_5 (2 \cdot 8)$$

— ODEJMOWANIE
LOGARYTMÓW -
TE SAME PODSTAWY!

$$\log_a b - \log_a c = \log_a (b \div c)$$

$$\log_5 2 - \log_5 c = \log_5 (2 \div 8)$$

— MNOŻENIE
LOGARYTMU
PRZEZ LICZBĘ

$$p \log_a b = \log_a b^p$$

$$3 \log_5 2 = \log_5 2^3$$

— ZAMIANA
PODSTAWY
LOGARYTMU

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$$\log_2 8 = \frac{\log_5 8}{\log_5 2}$$

— INNE

$$a^{\log_a b} = b$$

$$5^{\log_5 2} = 2$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_5 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_5 5 = 1$$



STUDENCKI TIP OD NATI

Zwracaj uwagę na znaki! Często myli nam się przy logarytmach + oraz * jeśli chodzi o wzory. Wzory z kategorii **Inne** naucz się na pamięć - nie ma ich na karcie maturalnej (oprócz pierwszego)!

A jak to wygląda na karcie wzorów?



KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

3. LOGARYTMY

Jeśli zapomnisz, czym jest logarytm, nie przejmuj się! Znajdziesz je na karcie wzorów!

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b :

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

Zamiana logarytmu na potęgę

$$a^{\log_a b} = b$$

dziedzina

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0$, $y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Pamiętaj, że ułamek to zwykłe dzielenie

Wzór na zmianę podstawy logarytmu:

dziedzina

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Przykłady i zadania maturalne

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

$$\log x = \log_{10} x \Rightarrow \log 4 = \log_{10} 4$$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \text{ ponieważ } \log_b b = 1$$



STUDENCKI TIP OD NATI

Jeśli logarytm nie ma podanej podstawy pamiętaj – to nie jest błąd. Zajrzyj do karty wzorów. Po prostu podstawą jest 10.

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_9 27 + \log_9 3$ jest równa

A. 81

B. 9

C. 4

D. 2

$$\log_9 27 + \log_9 3 = \log_9 (27 \cdot 3) = \log_9 81 = 2$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_9 81 = x \Rightarrow 9^x = 81 \quad 9^2 = 81 \Rightarrow x = 2$$

Zadanie 2.

Liczba $\log_5 \sqrt{125}$ jest równa

A. $\frac{2}{3}$

B. 2

C. 3

D. $\frac{3}{2}$

$$\log_5 \sqrt{125} \Rightarrow$$

$$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$5^x = \sqrt{125}$$

$$5^x = 125^{\frac{1}{2}}$$

$$5^x = (5 \cdot 5 \cdot 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$5^x = (5^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 5^x = 5^{3 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow 5^x = 5^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$5^x = 5^{\frac{3}{2}}$$

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 3.

Liczba $4 \log_4 2 + 2 \log_4 8$ jest równa

A. $6 \log_4 10$

B. 16

C. 5

D. $6 \log_4 16$

$$4 \log_4 2 + 2 \log_4 8 = \log_4 2^4 + \log_4 8^2 = \log_4 16 + \log_4 64 = 2 + 3 = 5$$

Jest też drugi sposób!

II sprawdź 4 da nam 1024

$$= \log_4 (16 \cdot 64) = \log_4 1024 \Rightarrow 4^x = 1024$$
$$4^x = 4^5$$
$$x = 5$$

$$\log_4 16 = 2$$
$$4^2 = 16$$
$$2 = 2$$

$$\log_4 64 = y$$
$$4^y = 64$$
$$y = 3$$

Zadanie 4.

Liczba $\frac{\log_3 27}{\log_3 \sqrt{27}}$ jest równa

A. $-\frac{1}{2}$

B. 2

C. -2

D. $\frac{1}{2}$

$$\frac{\log_3 27}{\log_3 \sqrt{27}} = ?$$

$$= \frac{3}{\frac{3}{2}} = 3 : \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

$$\textcircled{1} \log_3 27 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$$

$$\textcircled{2} \log_3 \sqrt{27} \Rightarrow 3^y = 27^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^y = (3^3)^{\frac{1}{2}}$$
$$3^y = 3^{3 \cdot \frac{1}{2}}$$
$$3^y = 3^{\frac{3}{2}}$$
$$y = \frac{3}{2}$$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
również wydrukować



Zadanie 1.

Liczba $\log_{\sqrt{2}} 2$ jest równa

A. 2

B. 4

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{1}{2}$



Zadanie 2.

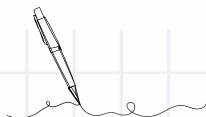
Liczba $2\log_3 6 - \log_3 4$ jest równa

A. 4

B. 2

C. $2\log_3 2$

D. $\log_3 8$



 Zadanie 3.

 Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



Kanał Stuencki

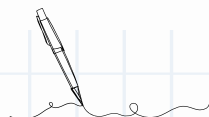
Liczba $2\log_2 3 - 2\log_2 5$ jest równa

A. $\log_2 \frac{9}{25}$

B. $\log_2 \frac{3}{5}$

C. $\log_2 \frac{9}{5}$

D. $\log_2 \frac{6}{25}$



 Zadanie 4.

Liczba $\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})$ jest równa

A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. 3



 Zadanie 5.

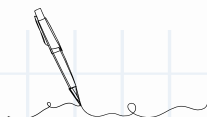
Liczba $2\log_5 10 - \log_5 4$ jest równa

A. 2

B. $\log_5 96$

C. $2\log_5 6$

D. 5



 Zadanie 6.

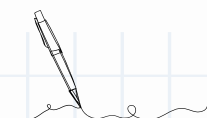
Suma $\log_8 16 + 1$ jest równa

A. 3

B. $\frac{3}{2}$

C. $\log_8 17$

D. $\frac{7}{3}$



 Zadanie 5.



Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



Kanał Stuencki

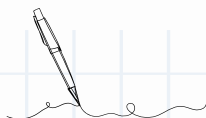
Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy

A. -6

B. -4

C. -1

D. 1



 Zadanie 6.

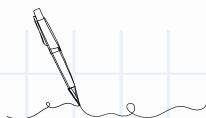
Wyrażenie $\log_4(2x-1)$ jest określone dla wszystkich liczb x spełniających warunek

A. $x \leq \frac{1}{2}$

B. $x > \frac{1}{2}$

C. $x \leq 0$

D. $x > 0$



3

Wartość bezwzględna



DEFINICJA WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ

CZYM JEST WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA?

- Wartość bezwzględna (moduł liczby) dla dowolnej liczby rzeczywistej to:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$



$$|2| = 2 \text{ bo } 2 \geq 0$$

$$|-5| = 5 \text{ bo } -5 < 0$$



Czyli co to tak właściwie jest?



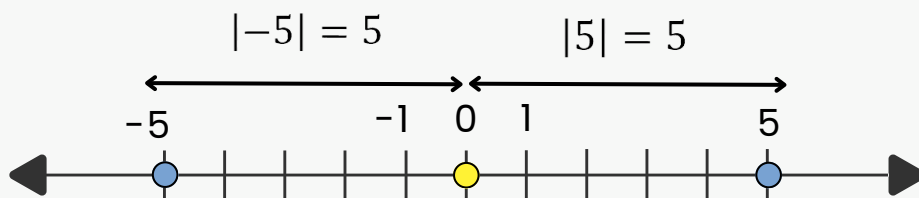
INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA JAKO ODLEGŁOŚĆ NA OSI

- Jest to odległość liczby x od 0 na osi liczbowej

PRZYKŁAD 1. Liczymy wartość bezwzględną z 5.

Odległość na osi od -5 do 0 oraz od 0 do 5 w obu przypadkach jest równa 5.



STUDENCKI TIP OD NATI

Odległość (na osi liczbowej) nie może być ujemna, dlatego wartość bezwzględna zawsze jest liczbą nieujemną!



Czas na kilka strategii maturalnych



1

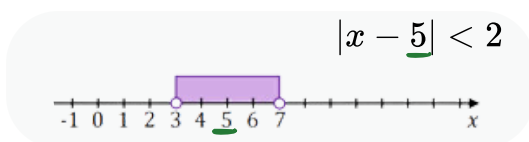
ZAWSZE ROZPATRUJ DWA PRZYPADKI

- Od zera zawsze możemy iść tą samą odległość w dwie strony - **na plus i na minus**
- W karcie wzorów jest podpowiedź

2

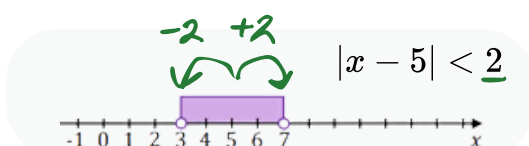
ZACZNIJ OD ANALIZY RYSUNKU Z ZADANIA

1. LICZBA ODEJMOWANA JEST ŚRODKIEM PRZEDZIAŁU



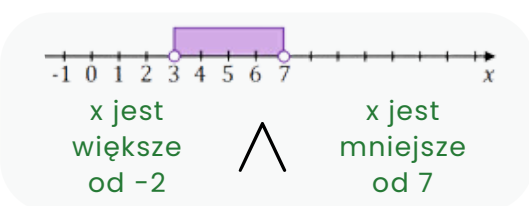
- Aby dojść do rozwiązania idziemy na prawo i na lewo **od 5** o 2 jednostki
- Jeśli mielibyśmy $|x+5|$, to środkiem by była liczba -5 (zawsze przeciwny znak)

2. ODLEGŁOŚĆ OD ŚRODKA PRZEDZIAŁU DO KRAŃCA TO PRAWA STRONA



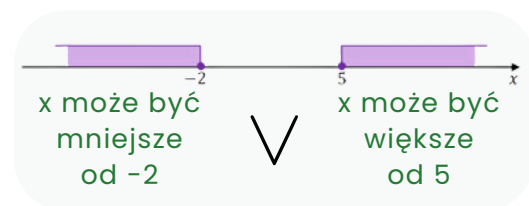
- Aby dojść do rozwiązania idziemy i na prawo i na lewo od 5 o 2 jednostki

3. ZAMKNIĘTY ODCINEK - CZĘŚĆ WSPÓLNA - ZNAK MNIEJSZOŚCI <



- Zapisujemy spójnik "i"
- Czytaj to jako "x jest większe od 3 **I** mniejsze od 7"
- Obydwa warunki muszą być jednocześnie - stąd słowo **I**

4. OTWARTE ODCINKI - SUMA ZBIORÓW - ZNAK WIĘKSZOŚCI >



- Zapisujemy spójnik "lub"
- Czytaj to jako "x może być mniejsze od -2 **LUB** większe od 5"
- Obydwa warunki nie są możliwe jednocześnie - stąd słowo **LUB**

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Definicja wartości bezwzględnej

Podpowiedź - rozpatruj dwa przypadki

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu o współrzędnej x od punktu o współrzędnej 0 .

- Dla dowolnej liczby x mamy:

Wartość bezwzględna z 0 to 0

WB to liczba nieujemna

$$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \quad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |x - y| \leq |x| + |y| \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

Spójnik "i"

$$|x - a| \leq r \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a - r \leq x \leq a + r$$

Spójnik "lub"

$$|x - a| \geq r \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r$$



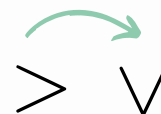
STUDENCKI TIP OD OLI

Znak mniejszości - spójnik "i".
Znak większości - spójnik "lub".
Wystarczy je obrócić w prawo!

spójnik "i"



spójnik "lub"



Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie $|x + 4| = 5$


$$|x - 4| = 5$$

Uwaga! W równaniach zawsze mamy spójnik "LUB"!

$$x - 4 = 5$$

✓

$$x - 4 = -5$$

$$x = 5 + 4$$

✓

$$x = -5 + 4$$

$$x = 9$$

✓

$$x = -1 \Rightarrow x \in \{-1, 9\}$$

Czytamy: "x może być równy -1 lub 9"

Zadanie 2.

Liczba $\frac{|3-9|}{-3}$ jest równa

A. 2

B. -2

C. 0

D. -4


$$\frac{|3-9|}{-3} = \frac{|-6|}{-3} = \frac{6}{-3} = -2$$

Przykłady zadań maturalnych

Chcesz więcej rozwiązań?
Zapraszamy na nasze laby :)

Zadanie 3.

Rozwiąż nierówność $|x - 9| > 26$

$$|x - 9| > 26$$

$$x - 9 > 26 \quad \vee$$

$$x - 9 < -26$$

$$x > 26 + 9 \quad \vee$$

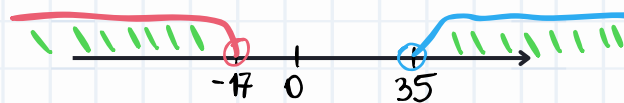
$$x < -26 + 9$$

$$x > 35 \quad \vee$$

$$x < -17$$

$$x \in (-\infty, -17) \cup (35, +\infty)$$

Znak większości - spójnik LUB



Zadanie 4.

Rozwiąż nierówność $|x - 2| < 3$

$$|x - 2| < 3$$

$$x - 2 < 3 \quad \wedge \quad x - 2 > -3$$

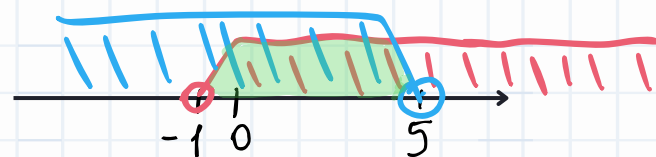
$$x < 5$$

$\wedge$

$$x > -1$$

$$x \in (-1, 5)$$

Znak mniejszości - spójnik i



Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 1.

Na osi liczbowej zaznaczono sumę przedziałów.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiór zaznaczony na osi jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

A. $|x - 3,5| \geq 1,5$

B. $|x - 1,5| \geq 3,5$

C. $|x - 3,5| \leq 1,5$

D. $|x - 1,5| \leq 3,5$

Zacznij od analizy rysunku!



Zadanie 2.

Wszystkich liczb całkowitych dodatnich spełniających nierówność $|x + 5| < 15$ jest

A. 9

B. 10

C. 20

D. 21





Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



Kanał Stuencki



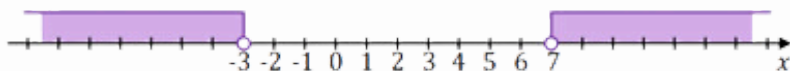
Zadanie 3.

Dana jest nierówność

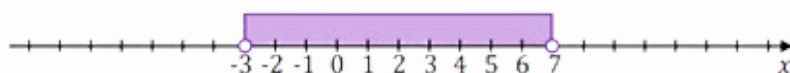
$$|x - 5| < 2$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

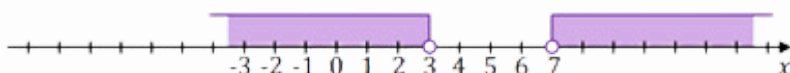
A.



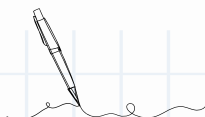
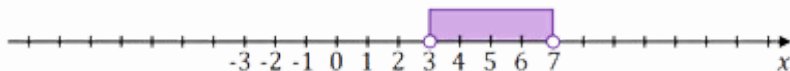
B.



C.



D.



4

Przedziały liczbowe

DEFINICJA PRZEDZIAŁU

CZYM SĄ PRZEDZIAŁY LICZBOWE?

- Przedział liczbowy to zbiór liczb rzeczywistych, które spełniają pewne określone w poleceniu warunki
- Wyróżniamy przedziały: otwarte, zamknięte, nieskończone
- Przedział może też być np. lewostronnie zamknięty i prawostronnie otwarty

PRZEDZIAŁ OTWARTY

liczby na brzegach nie należą do przedziału

$$x \in (-5, 5) \text{ to to samo co } -5 < x < 5$$

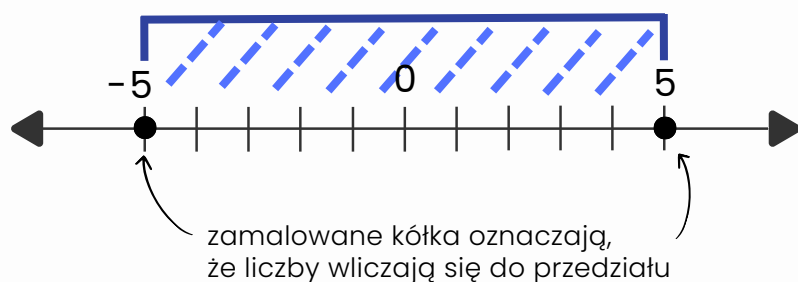


Zielony to obszar przedziału (pamiętaj: -5 i 5 nie należą do przedziału)

PRZEDZIAŁ ZAMKNIĘTY

liczby na brzegach należą do przedziału

$$x \in \langle -5, 5 \rangle \text{ to to samo co } -5 \leq x \leq 5$$



Niebieski to obszar przedziału (pamiętaj -5 i 5 należą do przedziału)

PRZEDZIAŁ NIEOGRANICZONY (NIESKOŃCZONY)

w przedziale pojawia się nieskończoność, np.:

$$x \in (-\infty, \infty)$$

$$x \in \langle -6, \infty)$$

$$x \in (-\infty, 24)$$

Przykłady zadań maturalnych

Chcesz więcej rozwiązań?
Zapraszamy na nasze laby :)

Zadanie 1.

Zaznacz na osi zbiór rozwiązań nierówności

$$|3x - 2| > 5$$

$$|3x - 2| > 5$$

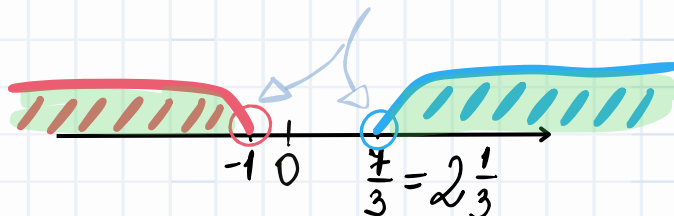
$$\text{I}^o \quad 3x - 2 > 5 \quad \vee \quad \text{II}^o \quad 3x - 2 < -5$$

$$3x > 7 \quad \vee \quad 3x < -3$$

$$x > \frac{7}{3} \quad \vee \quad x < -1$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2\frac{1}{3}, +\infty)$$

Kółka niezamalowane, dane liczby nie zawierają się w przedziałach



Zadanie 2.

Zaznacz na osi zbiór rozwiązań nierówności

$$|8 + x| \leq 9$$

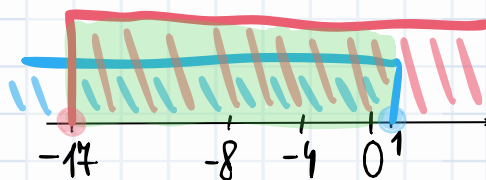
$$|8 + x| \leq 9$$

$$8 + x \leq 9 \quad \wedge \quad 8 + x \geq -9$$

$$x \leq 1 \quad \wedge \quad x \geq -17$$

$\Downarrow$

$$x \in [-17, 1]$$



PAMIĘTAJ O NAWIASACH < >

Przykłady zadań maturalnych

Chcesz więcej rozwiązań?
Zapraszamy na nasze laby :)

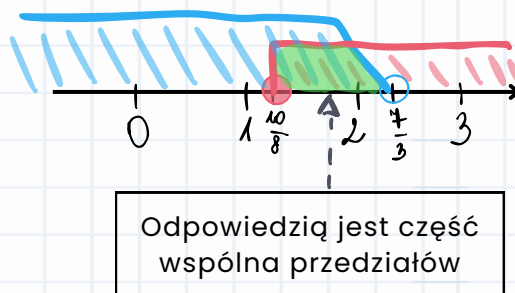
Zadanie 3.

Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , spełniających jednocześnie nierówności $0 < 7 - 3x$ oraz $7 - 3x \leq 5x - 3$.

↳ OBA WARUNKI MUSZĄ BYĆ SPEŁNION



$$\begin{aligned}0 < 7 - 3x &\wedge 7 - 3x \leq 5x - 3 \\3x < 7 &\wedge -3x - 5x \leq -3 - 7 \\x < \frac{7}{3} &\wedge -8x \leq -10 \quad | : (-8) \\(x < \frac{7}{3} &\wedge x \geq \frac{10}{8}) \Rightarrow x \in [\frac{10}{8}, \frac{7}{3})\end{aligned}$$



5

Zbiory



DEFINICJA ZBIORU

CZYM SĄ ZBIORY?

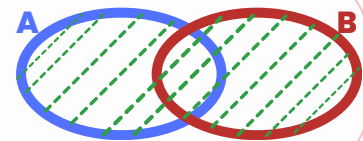
- **Zbiór to pojęcie pierwotne, czyli takie, którego się nie definiuje**
- Zbiory oznaczamy dużymi literami np. A, B, C, D, ...
- Elementy zbioru oznaczamy małymi literami a, b, c, d, ...

Poznaj działania na zbiorach

SUMA ZBIORU A I B

wszystkie elementy obu zbiorów

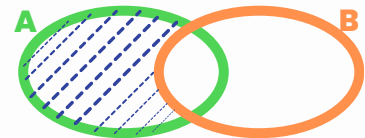
$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$



RÓŻNICA ZBIORU A I B

elementy należące do zbioru A i nienależące do zbioru B

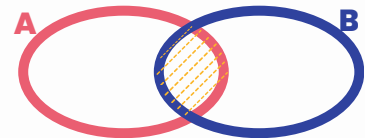
$$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$$



ILOCZYN ZBIORU A I B

część wspólna; elementy należące jednocześnie do obu zbiorów

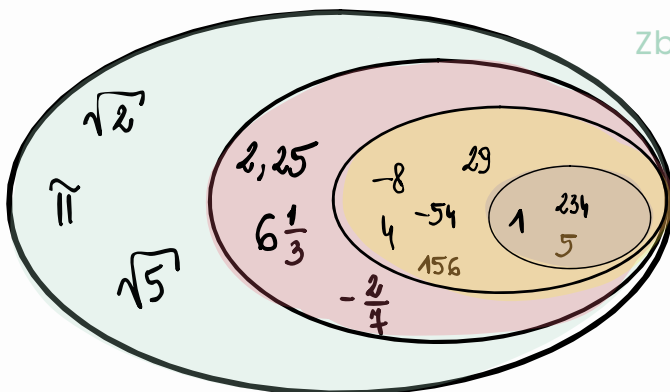
$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$



DEFINICJA LICZB RZECZYWISTYCH

LICZBY RZECZYWISTE

- **Wszystkie liczby, nadrzędny zbiór nad pozostałymi zbiorami**
- Każda liczba, która przychodzi Ci do głowy, to liczba rzeczywista:)



Zbiór liczb niewymiernych

Zbiór liczb wymiennych

Zbiór liczb całkowitych

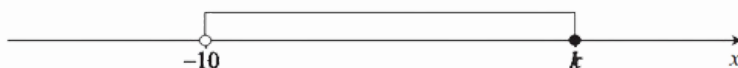
Zbiór liczb naturalnych

Twoja kolej, czyli zadania z CKE



Zadanie 1.

Na rysunku przedstawiony jest przedział $(-10, k)$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Suma wszystkich liczb całkowitych należących do tego przedziału jest równa 21.



Stąd wynika, że

- A. $k = 9$ B. $k = 11$ C. $k = 21$ D. $k = 31$



STUDENCKI TIP



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań? Zapraszamy na naszego Discorda. Z chęcią pomożemy!



Zadanie 2.

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{1-2x}{2} > \frac{1}{3}$ jest przedział

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$ D. $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$



Zadanie 3.

Wskaż rysunek, na którym przedstawiono przedział, będący zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $-4 \leq x - 1 \leq 4$.

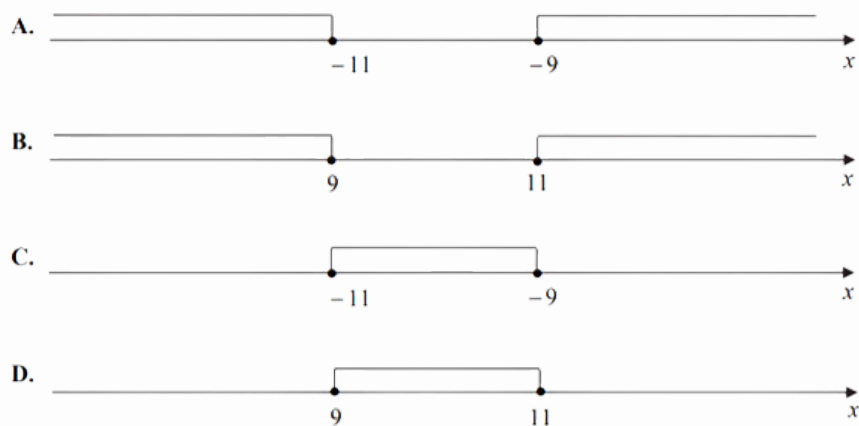
- A. 
- B. 
- C. 
- D. 





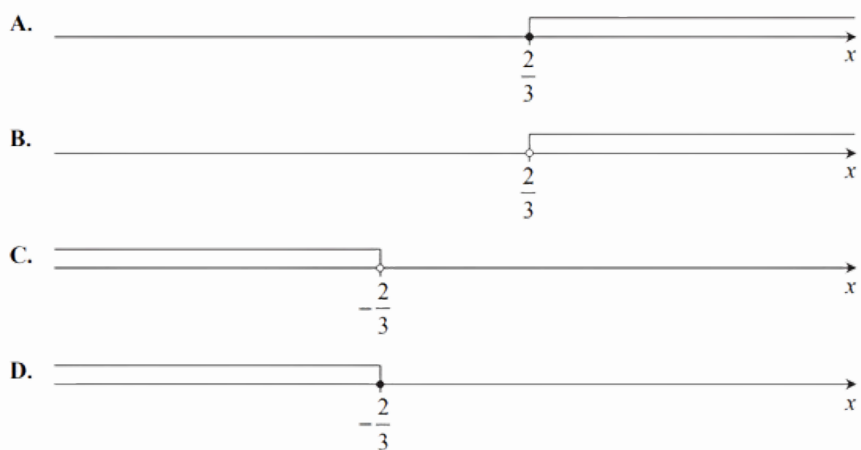
Zadanie 4.

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór wszystkich liczb x spełniających warunek: $11 \leq 2x - 7 \leq 15$.



Zadanie 5.

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $2 - 3x \geq 4$.



— Liczby rzeczywiste w pigułce



- **1** **Widzisz potęgi i pierwiastki?**
Pierwszy krok – zajrzyj do karty wzorów.
- **2** **Logarytmy to głównie wzory, które masz na maturze!**
Logarytm odpowiada na pytanie: **do jakiej potęgi musisz podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę b ?**
- **3** **Wartość bezwzględna to odległość na osi od 0.**
Odległość nie może być ujemna, więc wartość bezwzględna z liczby jest zawsze liczbą nieujemną.
- **4** **Przy przedziałach zwracaj uwagę na nawiasy $() \langle \rangle$**
Mówią one nam, czy liczba na brzegu przedziału wchodzi w skład przedziału czy nie.
- **5** **Tego nie znajdziesz na karcie wzorów, a warto to umieć:**

$$a^0 = 1 \quad (\text{dla } a \neq 0)$$

$$0^n = 0 \quad (\text{dla } n > 0)$$

$$a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

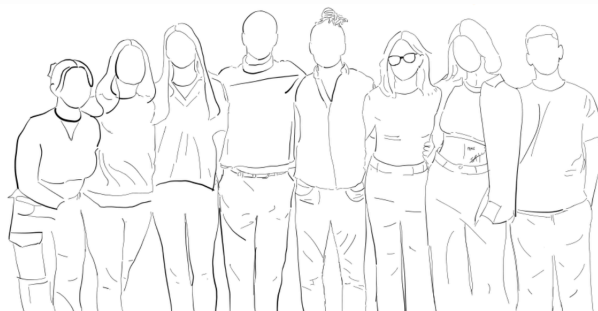
wspieramy pro **STUDENTCKU**



praktyka



nauka



przedsię
biorczość



inicjatywa

Dziękujemy za wspólną naukę. Mamy nadzieję, że zdobywanie wiedzy było dla Ciebie przyjemne. Do zobaczenia na studiach!

Powodzenia!

ŚLEDŹ DALEJ!



www.tumatura.pl



[@tuMATURA](https://www.youtube.com/@tuMATURA)



I DOŁĄCZ DO
STUDENCKIEJ
SPOŁECZNOŚCI!



[@kanalstudencki](https://www.instagram.com/kanalstudencki)



[@kanal.studencki](https://www.facebook.com/kanal.studencki)



www.kanalstudencki.pl



kontakt@kanalstudencki.pl

Wydane przez Fundację Kanał Studencki.
Wszelkie prawa zastrzeżone. Podręcznik
integralny z zajęciami tuMATURA, dostępnymi
na: www.tumatura.pl

Spis Treści

Czytasz notatki stworzone przez **Fundację Kanał Studencki** w ramach projektu **Tumatura**.

1 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE – ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.



Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

– **3** HEJ, TO MY!

– **4** CZYM JEST TU.MATURA?

– **5** LICZBY RZECZYWISTE

7 POTĘGI I PIERWIASTKI

17 LOGARYTMY

26 WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

33 PRZEDZIAŁY LICZBOWE

36 ZBIORY

COMING SOON

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

FUNKCJE

CIĄGI

TRYGONOMETRIA

STEREOMETRIA

PLANIMETRIA

GEOMETRIA ANALITYCZNA

RACHUNEK

PRAWDOPODOBIENSTWA I

STATYSTYKA

OPTYMALIZACJA

Opracowanie merytoryczne: Aleksandra Benowska, Natalia Król

Oprawa graficzna i skład: Aleksandra Benowska