

$$\log_a(x^n) = n \log_a x$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y = mx + b$$

Funkcje

Bezpłatne notatki i zadania maturalne

POZIOM PODSTAWOWY

Zgodnie z nową formułą 2023



Konkursy i nagrody na
naszym Discordzie!

www.tumatura.pl

Spis treści

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

1	O nas, projekt <u>TuMatura</u>	<i>str 3</i>
2	Wymogi CKE	<i>str 4-5</i>
3	Funkcje	<i>str 6-33</i>
	Podstawy funkcji	<i>str 6-12</i>
	Funkcja liniowa	<i>str 13-20</i>
	Funkcja kwadratowa	<i>str 21-32</i>
	Inne funkcje	<i>str 33</i>

Psss... sprawdź resztę naszych notatek na stronie TuMatura.pl

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE – ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.



Obniżamy koszt przygotowania się do matury w Polsce

Czytasz notatki stworzone przez **Fundację Kanał Studencki** w ramach projektu **Tumatura**.

Jeśli uważasz nasze materiały za wartościowe – **weź udział w anonimowym badaniu** i pomóż nam zmierzyć, ile kosztuje przygotowanie się do zdania matury w Polsce.

Anonimowa ankieta

Ile kosztuje przygotowanie się do matury w Polsce?

Odpowiedz



Korzystasz z wersji wydrukowanej?
Zeskanuj kod QR i weź udział w badaniu!

Przejrzysta teoria

Studenckie typy i rady

Zadania maturalne

Wytłumaczone karty wzorów



CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE



STUDENCKI TIP OD OLI

Zastanów się, co już umiesz, a co jeszcze wymaga przećwiczenia. Warto zaglądać tu raz na jakiś czas – wtedy lepiej widzisz swój postęp!

UCZEŃ...

- 1 ☐ **Określa funkcje** jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach)
- 2 ☐ **Oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym**
- 3 ☐ **Odczytuje i interpretuje wartości funkcji** określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie
- 4 ☐ **Odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane**
- 5 ☐ **Interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej**
- 6 ☐ **Wyznacza wzór funkcji liniowej** na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach
- 7 ☐ **Szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem**

CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE



STUDENCKI TIP OD NATI

W tym dziale mamy dosyć sporo wymagań, warto się na nich skupić.

UCZEŃ...

- 8 ☐ Interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje)
- 9 ☐ Wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie
- 10 ☐ Wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- 11 ☐ Wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym
- 12 ☐ Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$
- 13 ☐ Posługuje się funkcją $y = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
- 14 ☐ Posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

1

Podstawy funkcji



DEFINICJA FUNKCJI

Funkcja to związek, który przyporządkowuje każdemu elementowi jednego zbioru dokładnie jeden element innego zbioru.



Innymi słowy jest to jak adres zamieszkania - pod konkretnym adresem mieszka konkretny człowieczek

DEFINICJA ARGUMENTU FUNKCJI

Argument funkcji to wartość, którą podajesz do funkcji, aby otrzymać wynik. Najczęściej oznaczany przez x .



Na przykład człowieczek, którego adres sprawdzasz, żeby znaleźć jego dom.

DEFINICJA WARTOŚCI FUNKCJI

Wartość funkcji to konkretny wynik, który otrzymujesz, korzystając z danego argumentu. Najczęściej oznaczany przez y .

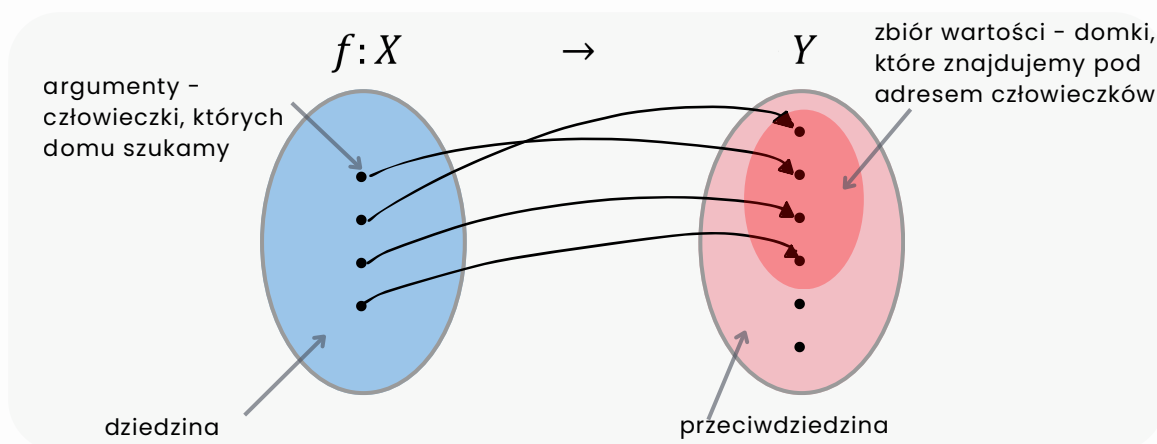


Na przykład dom znajdujący się pod adresem Twojego kolegi.

DEFINICJA MIEJSCA ZEROWEGO

Miejscem zerowym nazywamy argument (x) dla którego funkcja przyjmuje wartość 0. Jest to punkt przecięcia osi x .

PRZYKŁAD 1. Każdemu x przyporządkowujemy jakiegoś y .



STUDENCKI TIP OD NATI

Funkcje z reguły oznaczamy małymi literami np. f , g , h .

Monotoniczność funkcji

FUNKCJA ROSNĄCA

Funkcja f jest rosnąca w zbiorze, jeżeli **wraz ze wzrostem argumentów (np. x) rosną także wartości funkcji.**

Jeżeli dla każdego $x_1 < x_2$ prawdą jest, że $f(x_1) < f(x_2)$.

FUNKCJA MALEJĄCA

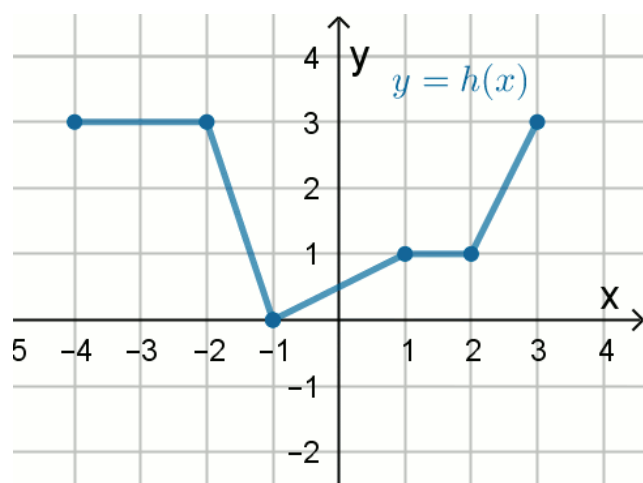
Funkcja f jest malejąca w zbiorze, jeżeli **wraz ze wzrostem argumentów (np. x) wartość funkcji maleje.**

Jeżeli dla każdego $x_1 < x_2$ prawdą jest, że $f(x_1) > f(x_2)$.

FUNKCJA STAŁA

Funkcja f jest stała w zbiorze, jeżeli **wraz ze wzrostem argumentów (np. x) wartość funkcji jest stała.**

Jeżeli dla każdego $x_1 < x_2$ prawdą jest, że $f(x_1) = f(x_2)$.



Funkcja jest:

- rosnąca w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$; $\langle 2, 3 \rangle$
- malejąca w przedziale $\langle -2, -1 \rangle$
- stała w przedziale $\langle -4, -2 \rangle$; $\langle 1, 2 \rangle$

Proste równoległe i proste prostopadłe

Proste są równoległe, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe

$$a_1 = a_2$$

Proste są prostopadłe, gdy ich współczynniki kierunkowe

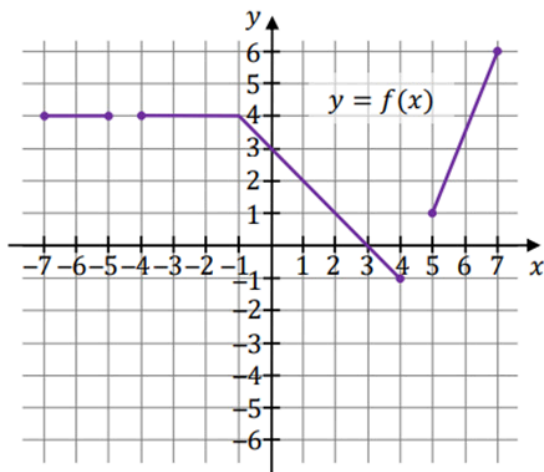
$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 1.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) narysowano wykres funkcji $y = f(x)$ (zobacz rysunek).



Funkcja f jest rosnąca w przedziale

A. $[-5, 4]$

B. $[5, 7]$

C. $[1, 5]$

D. $[-1, 5]$

Widzimy, że w przedziale $\langle 5, 7 \rangle$ wraz ze wzrostem argumentów rosną wartości, zatem to jedyna poprawna odpowiedź. Innymi słowy – idąc w prawo po osi x , wartości na osi y są coraz większe.

W przedziale $\langle -7, -5 \rangle$ oraz $\langle -4, -1 \rangle$ funkcja jest stała, czyli nie rośnie ani nie maleje. W przedziale $\langle -1, 4 \rangle$ funkcja jest malejąca.

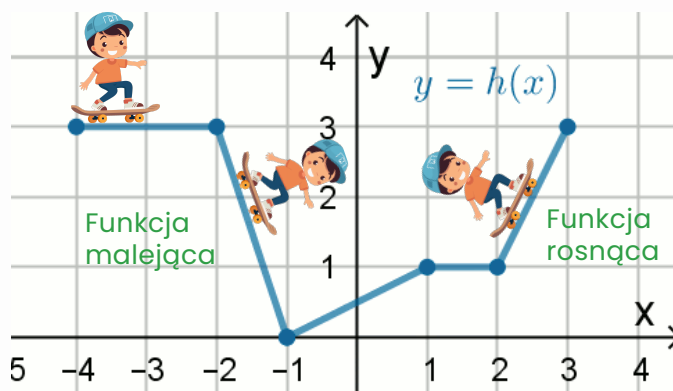


STUDENCKI TIP OD OLI

Monotoniczność możesz łatwo określić, rysując gośka na deskorolce.

Zawsze jedź w prawą stronę. Jeśli jedzie w górę – funkcja jest rosnąca, jeśli w dół – malejąca:)

Funkcja stała



Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 2.

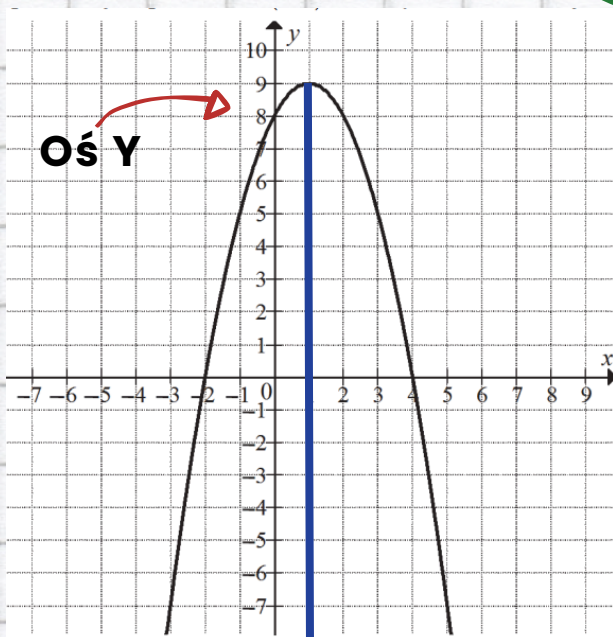
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

A. $(-\infty, -2)$

B. $\langle -2, 4 \rangle$

C. $\langle 4, +\infty)$

D. $(-\infty, 9)$



Patrzemy na oś Y (pionową). Widzimy, że wartości funkcji idą od nieskończoności do 9

$$\text{Zw}_f = (-\infty, 9)$$

Zauważ, że 9 również zawiera się w przedziale ponieważ występuje tam funkcja.

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 3.

Proste opisane równaniami $y = \frac{2}{m-1}x + m - 2$ oraz $y = mx + \frac{1}{m+1}$ są prostopadłe, gdy

A. $m = 2$

B. $m = \frac{1}{2}$

C. $m = \frac{1}{3}$

D. $m = -2$

$a_1 \cdot a_2 = -1$

Zapisujemy warunek prostopadłości prostych i podstawiamy do niego nasze współczynniki kierunkowe.

$(a_1 = \frac{2}{m-1} \wedge a_2 = m) \Rightarrow \frac{2}{m-1} \cdot m = -1$

$\frac{2m}{m-1} = -1 \quad | \cdot (m-1) \Rightarrow 2m = -1(m-1)$

$2m = -m + 1$

$3m = 1 \quad | :3$

$m = \frac{1}{3}$

D: $m-1 \neq 0$
 $m \neq 1$

Pamiętamy o dziedzinie! Mianownik nie może być równy zero (nie dzielimy przez zero).

Zadanie 4.

Proste o równaniach $y = (m+2)x + 3$ oraz $y = (2m-1)x - 3$ są równoległe, gdy

A. $m = 2$

B. $m = 3$

C. $m = 0$

D. $m = 1$

$a_1 = a_2$

Współczynnik kierunkowy w funkcji liniowej występuje przy x .

$a_1 = m+2 \quad \wedge \quad a_2 = 2m-1$

$m+2 = 2m-1$

Podstawiamy a_1 i a_2 do warunku równoległości.

$m - 2m = -1 - 2$

$-1m = -3 \quad | :(-1) \Rightarrow m = 3$

Twoja kolej, czyli zadania z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



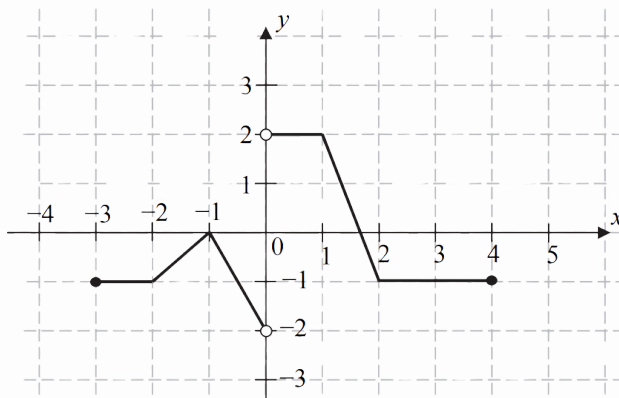
Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
również wydrukować



Zadanie 1.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Zbiorem wartości funkcji f jest

A. $(-2, 2)$

B. $\langle -2, 2 \rangle$

C. $\langle -2, 2 \rangle$

D. $(-2, 2)$



Zadanie 2.

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{2x^3}{x^6 + 1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wtedy

$f(-\sqrt[3]{3})$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$

B. $-\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$





Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



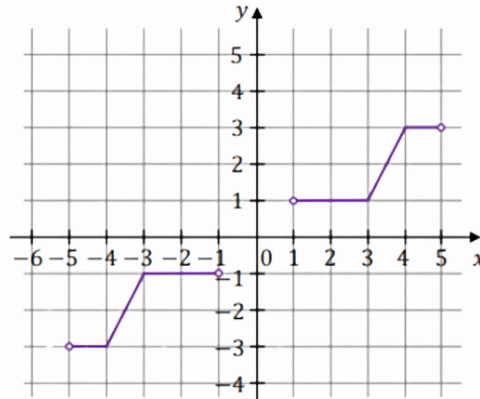
Kanał Stuencki



Zadanie 3.

Zadanie 13.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) narysowano wykres funkcji $y = f(x)$ (zobacz rysunek).

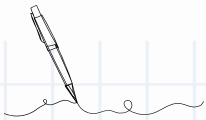


Zadanie 13.1. (0–2)

Uzupełnij tabelę. Wpisz w każdą pustą komórkę tabeli właściwą odpowiedź, wybraną spośród oznaczonych literami A–F.

Dziedziną funkcji f jest zbiór	
Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór	

- A. $[-3, -1] \cup [1, 3]$
- B. $(-3, 3)$
- C. $(-3, -1) \cup (1, 3)$
- D. $[-5, -1] \cup [1, 5]$
- E. $(-5, 5)$
- F. $(-5, -1) \cup (1, 5)$



2

Funkcja liniowa



DEFINICJA FUNKCJI LINIOWEJ

Funkcja liniowa to taka, w której x występuje tylko w pierwszej potęgze.
Określamy ją wzorem :

WARTOŚĆ

WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY
Określa monotoniczność
funkcji

$$y = ax + b$$

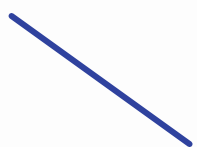
WYRAZ WOLNY

Punkt przecięcia z osią y

ARGUMENT

FUNKCJA JEST
MALEJĄCA

$$a < 0$$



FUNKCJA JEST
ROSĄCA

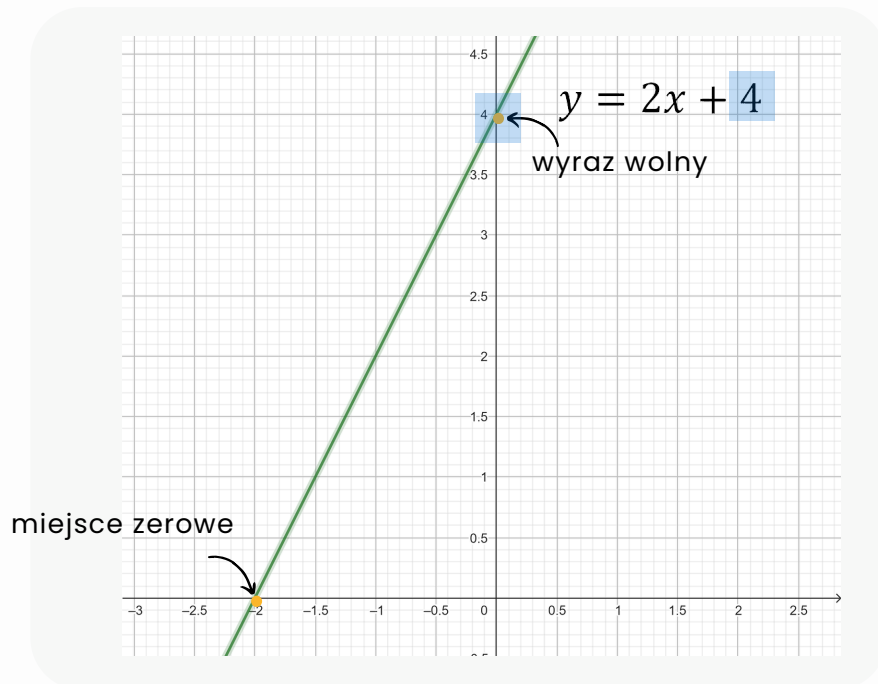
$$a > 0$$



FUNKCJA JEST STAŁA $a = 0$



PRZYKŁAD 1. Jak wygląda funkcja liniowa?



Wzór na miejsce zerowe

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

$$x_0 = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2$$



STUDENCKI TIP OD OLI

Żeby wyliczyć miejsce zerowe bez wzoru wystarczy podstawić za y 0 i wyliczyć x .

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!
NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?
STRONY 23 I 22

Równanie kierunkowe prostej

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy , to można opisać ją równaniem kierunkowym:

Wzór funkcji liniowej

$$y = ax + b$$

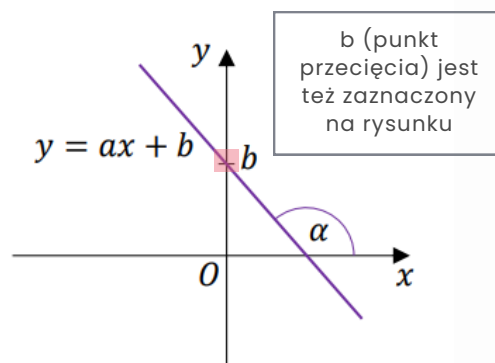
Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej.

To może się przydać w jakimś specyficznym zadaniu zamkniętym, ale raczej z tego nie korzystamy

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$.

Rysunek dla prostej o $a > 0$ i $b > 0$



Ściąga czym jest b (wyraz wolny) w funkcji liniowej

Proste równoległe

Jeżeli proste są równoległe, to współczynniki a tych prostych są takie same

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

Proste prostopadłe

Jeżeli proste są prostopadłe, to współczynniki a tych prostych po wymnożeniu przez siebie nawzajem dadzą -1 .

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zapisz się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Miejszem zerowym funkcji liniowej f jest liczba 1. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $(-1, 4)$.

Wzór funkcji f ma postać

A. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

B. $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

C. $f(x) = -2x + 2$

D. $f(x) = -3x + 1$

$A = (1, 0)$ miejsce zerowe

$B = (-1, 4)$ punkt podany w zadaniu

1. Aby wyznaczyć wzór **funkcji liniowej**, potrzebujemy **dwóch punktów**.

2. Rozwiązujemy układ równań, podstawiając współrzędne punktów A i B do $y = ax + b$

$$\begin{aligned} A \quad 0 &= a \cdot 1 + b \\ B \quad 4 &= a \cdot (-1) + b \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \Rightarrow a = -2 \\ -a + b = 4 \Rightarrow -(-b) + b = 4 \\ 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2x + 2$$

Zadanie 2.

Na wykresie funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (m-1)x + 3$ leży punkt $S = (5, -2)$.

Zatem

A. $m = -1$

B. $m = 0$

C. $m = 1$

D. $m = 2$

$y = f(x) = (m-1)x + 3$

$S = (5, -2)$

Podstawiamy współrzędne punktu S do funkcji i wyznaczamy niewiadomą m .

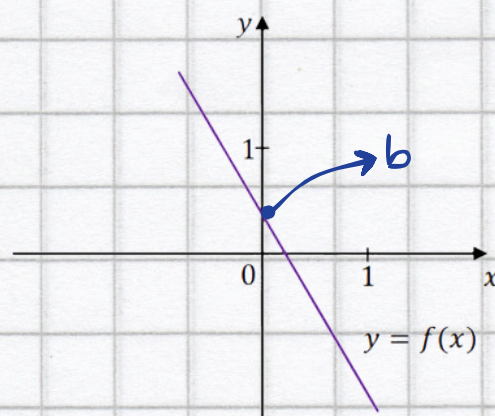
$$-2 = (m-1) \cdot 5 + 3$$

$$-2 = 5m - 5 + 3$$

$$-5m = -5 + 3 + 2 \Rightarrow -5m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Zadanie 3.

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji f w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) .



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba a oraz liczba b we wzorze funkcji f spełniają warunki:

A. $a > 0$ i $b > 0$.

B. $a > 0$ i $b < 0$.

C. $a < 0$ i $b > 0$.

D. $a < 0$ i $b < 0$.

 Współczynnik a mówi nam o nachyleniu funkcji. U nas funkcja jest malejąca ($a < 0$)

Współczynnik b to punkt przecięcia funkcji z osią OY . Widzimy, że funkcja przecina się z osią y nad zerem, więc $b > 0$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI

Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zajrzyj na nasz kanał na [YouTube](#)!

Materiały możesz
również wydrukować



Zadanie 1.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykresy funkcji liniowych $f(x) = (2m + 3)x + 5$ oraz $g(x) = -x$ nie mają punktów wspólnych dla

A. $m = -2$

B. $m = -1$

C. $m = 1$

D. $m = 2$



Zadanie 2.

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Miejsce zerowe funkcji f jest liczbą 4.	P	F
Punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią Oy ma współrzędne $(0, -\frac{1}{6})$.	P	F

SUBSCRIBE 

To zadanie jest
rozwiązane na
YouTube!





Zadanie 3.

Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = \sqrt{3}(x+1) - 12$ jest liczba

A. $\sqrt{3} - 4$

B. $-2\sqrt{3} + 1$

C. $4\sqrt{3} - 1$

D. $-\sqrt{3} + 12$



Zadanie 4.

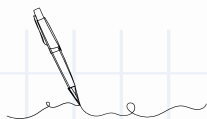
Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, a punkt $M = (3, -2)$ należy do wykresu tej funkcji. Współczynnik a we wzorze tej funkcji jest równy

A. 1

B. $\frac{3}{2}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. -1





Zadanie 5.

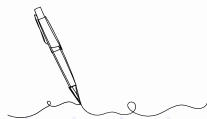


STUDENCKI TIP OD OLI

“Dla wszystkich liczb rzeczywistych” oznacza po prostu “dla wszystkich liczb”.

Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$, dla wszystkich liczb rzeczywistych x . Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Funkcja f jest malejąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P = \left(0, \frac{1}{3}\right)$.
- B. Funkcja f jest malejąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P = (0, -1)$.
- C. Funkcja f jest rosnąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P = \left(0, \frac{1}{3}\right)$.
- D. Funkcja f jest rosnąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P = (0, -1)$.



 Zadanie 6.

Funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = 2x + b$ ma takie samo miejsce zerowe, jakie ma funkcja liniowa $g(x) = -3x + 4$. Stąd wynika, że

A. $b = 4$

B. $b = -\frac{3}{2}$

C. $b = -\frac{8}{3}$

D. $b = \frac{4}{3}$

 **Zadanie 7.**

Proste o równaniach $2x - 3y = 4$ i $5x - 6y = 7$ przecinają się w punkcie P . Stąd wynika, że

A. $P = (1, 2)$

B. $P = (-1, 2)$

C. $P = (-1, -2)$

D. $P = (1, -2)$



3

Funkcja kwadratowa

DEFINICJA FUNKCJI KWADRATOWEJ

Funkcja kwadratowa to taka, w której występuje x podniesione do drugiej potęgi. Inaczej nazywamy ją trójmianem kwadratowym i określamy wzorem:

$$y = ax^2 + bx + c$$

WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY

Określa czy ramiona są skierowane w górę czy w dół

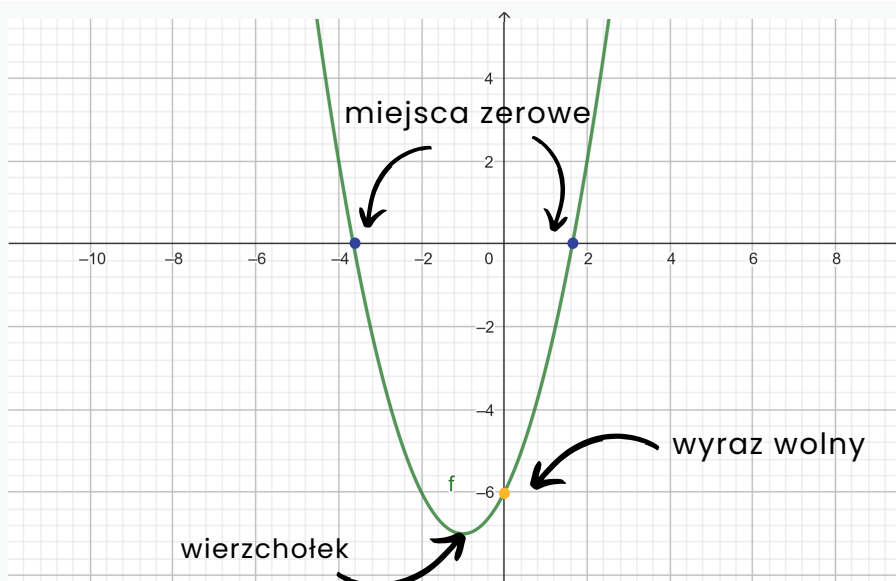
$a \neq 0$

WYRAZ WOLNY

Punkt przecięcia z osią y ma współrzędne $(0, c)$

a, b, c to współczynniki liczbowe

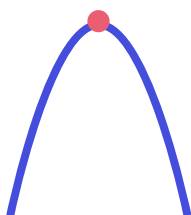
PRZYKŁAD 1. Jak wygląda funkcja kwadratowa?



RAMIONA PARABOLI SKIEROWANE DO DOŁU

$$a < 0$$

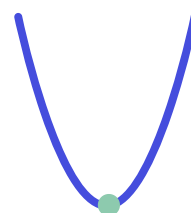
Funkcja ma **maksimum** w wierzchołku



RAMIONA PARABOLI SKIEROWANE DO GÓRY

$$a > 0$$

Funkcja ma **minimum** w wierzchołku



NAZWA

WZÓR

PRZYKŁAD

$$a = 4 \quad b = 5 \quad c = 1 \quad p = 3 \quad q = 7$$

WYRÓŻNIK
TRÓJMIANU
KWADRATOWEGO
(DELTA)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$$

MIEJSCA ZEROWE

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

WIERZCHOŁEK

$$W = (p, q) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

$$W = \left(\frac{-5}{2 \cdot 4}, \frac{-9}{4 \cdot 4} \right) = \left(\frac{-5}{8}, \frac{-9}{16} \right)$$

POSTAĆ
OGÓLNA
FUNKCJI

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = 4x^2 + 5x + 1$$

POSTAĆ
KANONICZNA
FUNKCJI

$$y = a(x - p)^2 + q$$

$$y = 4 \left(x - \frac{5}{8} \right)^2 - \frac{9}{16}$$

POSTAĆ
ILOCZYNOWA
FUNKCJI

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = 4(x + 1)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$



Postacie funkcji kwadratowej

1

POSTAĆ OGÓLNA

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = -x^2 + 3x + 4$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 9 + 16 = 25$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 - 5}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 + 5}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Co nam daje?

- **c** – punkt przecięcia funkcji z osią OY
- **a** – współczynnik kierunkowy
- możemy wyliczyć **delte**
- możemy wyliczyć **miejsca zerowe** i przejść do postaci **iloczynowej**
- możemy wyliczyć **wierzchołek** i przejść do postaci **kanonicznej**

$$W = (p, q)$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-25}{-4} = \frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4}$$

2

POSTAĆ KANONICZNA

$$y = a(x - p)^2 + q$$

$$y = -1\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

kanoniczna $\rightarrow$ ogólna

Co nam daje?

- **p i q** – współrzędne wierzchołka
- **a** – współczynnik kierunkowy

Z postaci kanonicznej przechodzimy do ogólnej poprzez rozwinięcie wzoru skróconego mnożenia

$$y = -(x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}) + \frac{25}{4} = -x^2 + 3x - \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = -x^2 + 3x + 4$$

3

POSTAĆ ILOCZYNOWA

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = -1(x - 4)(x + 1)$$

iloczynowa $\rightarrow$ ogólna

Co nam daje?

- **x1** oraz **x2** – **miejsca zerowe funkcji**
- **a** – współczynnik kierunkowy
- Jeśli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to postać iloczynowa nie istnieje!

Z postaci iloczynowej przechodzimy do funkcji ogólnej poprzez wymnożenie nawiasów

$$y = -1(x^2 + x - 4x - 4) = -1(x^2 - 3x - 4) = -x^2 + 3x + 4$$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

FUNKCJA KWADRATOWA

- Wyróżnikiem Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$) zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

delta

- Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

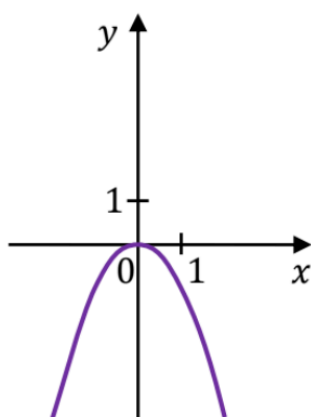
p to pierwsza współrzędna wierzchołka - często jest tak nazywane w zadaniach maturalnych

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie

$$W = (p, q) \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

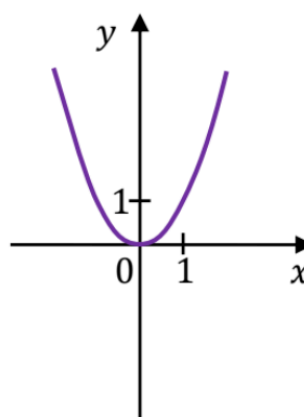
Gdy $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi. Gdy $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze.

$$a < 0 \quad y = ax^2$$



$a < 0$ to mamy smutną buźkę

$$a > 0 \quad y = ax^2$$



$a > 0$ to mamy wesołą buźkę

- Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$

(liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika Δ :

1. jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ściągą do równań i nierówności kwadratowych

2. jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3. jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

zwróć uwagę na znak “-” przed p!

- Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można przedstawić w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

jeśli delta jest ujemna to postać iloczynowa nie istnieje

- Wzory Viète'a

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

to jest potrzebne jedynie na rozszerzeniu



STUDENCKI TIP OD NATI

Umiejętność swobodnego przechodzenia między jedną postacią funkcji a drugą jest bardzo istotna!

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Odwiedź nasz kanał na [YouTube](#) :)

Zadanie 1.

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = (x - 13)^2 - 256$. Jednym z miejsc zerowych tej funkcji jest liczba (-3) .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba

A. (-29)

B. (-23)

C. 23

D. 29

W zadaniu mamy postać kanoniczną. Sprowadzamy funkcję do postaci ogólnej, aby wyznaczyć deltę, a następnie miejsca zerowe. Jak to zrobić? Rozwijamy wzór skróconego mnożenia $(x-13)^2$, a następnie dodajemy do siebie to, co możemy.

$$y = x^2 - 2 \cdot 13x + 13^2 - 256 = x^2 - 26x + 169 - 256 = x^2 - 26x - 87$$

Postać ogólna :)

$$\Delta = (-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-87) = 676 + 348 = 1024$$

$$\sqrt{\Delta} = 32$$

$$x_1 = \frac{26 - 32}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{26 + 32}{2} = 29$$

Zadanie 2.

Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = x^2 + x + c$. Jeżeli $f(3) = 4$, to

A. $f(1) = -6$

B. $f(1) = 0$

C. $f(1) = 6$

D. $f(1) = 18$

$$f(x) = y \quad f(3) = 4 \quad A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$4 = 3^2 + 3 + c \Rightarrow c = 4 - 9 - 3 = -8$$

$f(3) = 4$ oznacza, że mamy jakiś punkt, który ma współrzędne $x=3$ i $y=4$. Podstawiamy 3 i 4 do wzoru z zadania, aby wyliczyć niewiadome c .

$$f(x) = x^2 + x - 8$$

Znamy cały wzór, zatem możemy wyliczyć wartość funkcji dla $x=1$, czyli $f(1)$.

$$f(1) = 1^2 + 1 - 8 = 2 - 8 = -6 \Rightarrow f(1) = -6$$



Zadanie 3.

Równanie $\frac{(x^2-3x)(x^2+1)}{x^2-25} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie

- A. jedno rozwiązanie.
- B. dwa rozwiązania.
- C. trzy rozwiązania.
- D. cztery rozwiązania.

$$x^2 - 25 \neq 0$$

$$(x-5)(x+5) \neq 0$$

$$(x \neq 5 \wedge x \neq -5) \Rightarrow D \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$$

$$(x^2 - 3x)(x^2 + 1) = 0$$



$$x^2 - 3x = 0$$

$$\vee x^2 + 1 = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$\vee x^2 = -1$$

$$\{x=0 \vee x=3\}$$

$$\vee x \in \emptyset$$

Brak rozwiązań
(nigdy nie ujemne)

$$x \in \{0, 3\}$$

1. Wyznaczamy dziedzinę.
Mianownik nie może być zerem!

2. Przyrównujemy licznik do zera - jeśli licznik będzie zerem, to całość będzie zerem, np. $0/8 = 0$.

3. Przyrównujemy każdy nawias do zera.

Liczba podniesiona do kwadratu nigdy nie jest ujemna!

Zadanie 4.

Rozwiąż nierówność

$$x(2x - 1) < 2x$$

Zapisz obliczenia.

$$x(2x - 1) < 2x$$

$$2x^2 - x < 2x \quad / -2x$$

$$2x^2 - x - 2x < 0$$

$$2x^2 - 3x < 0$$

1. Wymnażamy nawias przez x.

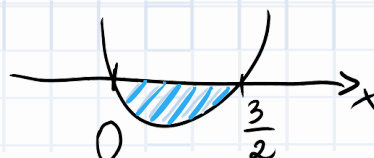
2. W równaniach i nierównościach kwadratowych przenosimy wszystko na lewą stronę. Po prawej stronie zostaje 0.

3. Szukamy miejsc zerowych funkcji kwadratowej, aby móc ją narysować.

4. $a > 0$ ($a=2$), mamy wesołą buźkę. Zaznaczamy obszar **pod osią OX**, bo w nierówności mamy znak < 0 .

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 9 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{3-3}{2 \cdot 2} = 0 \quad x_2 = \frac{3+3}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$



$$x \in (0, \frac{3}{2})$$

Zadanie 5.

SUBSCRIBE

To zadanie jest rozwiązane na [YouTube!](#)

Rozwiąż równanie

$$2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$$

Zapisz obliczenia.

$$2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$2x^3 - 10x + 3x^2 - 15 = 0$$

Wspólnym
elementem jest 2x

Wspólnym
elementem jest 3

$$2x(x^2 - 5) + 3(x^2 - 5) = 0$$

$$(x^2 - 5)(2x + 3) = 0$$

Wzór skróconego
mnożenia

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(2x + 3) = 0$$
$$(x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5} \vee x = -\frac{3}{2})$$

1. Wszystko przenosimy na lewą stronę.
Po prawej stronie zostaje 0.

2. Gdy x jest do 3. potęgi, zawsze szukamy, co możemy
wyłączyć przed nawias (szukamy wspólnych elementów).

3. Powstają dwa takie same nawiasy
- wyłączamy je przed nawias.

4. Przyrównujemy środek każdego
nawiasu do zera i otrzymujemy
rozwiązania.

$$x \in \left\{ \sqrt{5}, -\sqrt{5}, -\frac{3}{2} \right\}$$

Zadanie 6.

Równanie $x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$ z niewiadomą x

- A. nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.
- B. ma dokładnie dwa rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.
- C. ma dokładnie trzy rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.
- D. ma dokładnie pięć rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

$$x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

Wzór skróconego
mnożenia

$$x(x - \sqrt{4})(x + \sqrt{4})(x^2 + 4) = 0$$

$$x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 2 \quad x = -2$$

Brak rozwiązań
(zawsze większe od 0)

1. Po prawej już stoi 0, więc zaczynamy od szukania -
czy możemy coś wyłączyć przed nawias? Czy jest
jakiś wzór skróconego mnożenia?

2. Przyrównujemy środek każdego
nawiasu do zera i otrzymujemy
rozwiązania.

$$x \in \{-2, 0, 2\}$$

Zadanie 5.

Zadanie 31. (2pkt) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq a$, spełniona jest nierówność

$$\frac{a^2 + b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$



$$2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$2x^3 - 10x + 3x^2 - 15 = 0$$

Wspólnym
elementem jest $2x$

Wspólnym
elementem jest 3

$$2x(x^2 - 5) + 3(x^2 - 5) = 0$$

$$(x^2 - 5)(2x + 3) = 0$$

Wzór skróconego
mnożenia

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(2x + 3) = 0$$

$$(x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5} \vee x = -\frac{3}{2})$$

1. Wszystko przenosimy na lewą stronę.
Po prawej stronie zostaje 0.

2. Gdy x jest do 3. potęgi, zawsze szukamy, co możemy wyłączyć przed nawias (szukamy wspólnych elementów).

3. Powstają dwa takie same nawiasy
- wyłączamy je przed nawias.

4. Przyrównujemy środek każdego
nawiasu do zera i otrzymujemy
rozwiązania.

$$x \in \left\{ \sqrt{5}, -\sqrt{5}, -\frac{3}{2} \right\}$$

Zadanie 6.

Równanie $x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$ z niewiadomą x

- A. nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.
- B. ma dokładnie dwa rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.
- C. ma dokładnie trzy rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.
- D. ma dokładnie pięć rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.



$$x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

Wzór skróconego
mnożenia

$$x(x - \sqrt{4})(x + \sqrt{4})(x^2 + 4) = 0$$

$$x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 2 \quad x = -2$$

Brak rozwiązań
(zawsze większe od 0)

1. Po prawej już stoi 0, więc zaczynamy od szukania -
czy możemy coś wyłączyć przed nawias? Czy jest
jakiś wzór skróconego mnożenia?

2. Przyrównujemy środek każdego
nawiasu do zera i otrzymujemy
rozwiązania.

$$x \in \{-2, 0, 2\}$$

Twoja kolej, czyli zadania z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
również wydrukować



Zadanie 1.

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = -2(x+3)(x-5)$. Liczby x_1 , x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji f . Zatem

A. $x_1 + x_2 = -8$

B. $x_1 + x_2 = -2$

C. $x_1 + x_2 = 2$

D. $x_1 + x_2 = 8$



Zadanie 2.

Równanie $\frac{x^2+2x}{x^2-4} = 0$

A. ma trzy rozwiązania: $x = -2, x = 0, x = 2$

B. ma dwa rozwiązania: $x = 0, x = -2$

C. ma dwa rozwiązania: $x = -2, x = 2$

D. ma jedno rozwiązanie: $x = 0$





Zadanie 3.

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x - 3$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych

A. $(-6, -3)$

B. $(-6, 69)$

C. $(3, -12)$

D. $(6, -3)$



Zadanie 4.

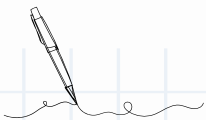
Suma wszystkich rozwiązań równania $x(x-3)(x+2) = 0$ jest równa

A. 0

B. 1

C. 2

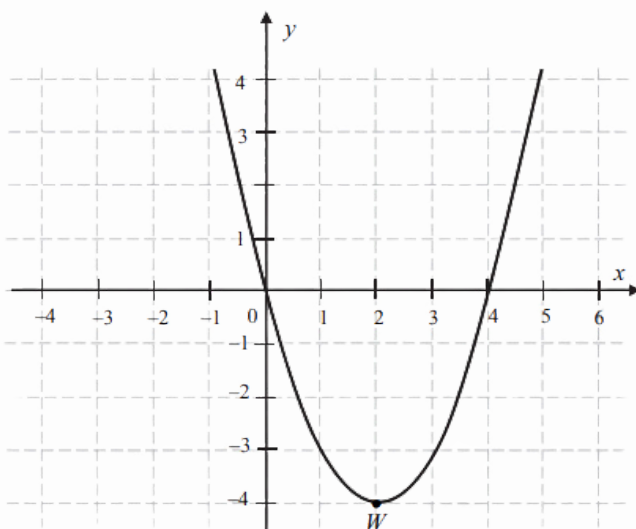
D. 3





Zadanie 5.

Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (2, -4)$. Liczby 0 i 4 to miejsca zerowe funkcji f .



Zadanie 8. (0–1)

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

- A. $(-\infty, 0)$ B. $\langle 0, 4 \rangle$ C. $\langle -4, +\infty \rangle$ D. $\langle 4, +\infty \rangle$

Zadanie 9. (0–1)

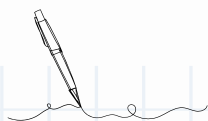
Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 4 \rangle$ jest równa

- A. -3 B. -4 C. 4 D. 0

Zadanie 10. (0–1)

Ośią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu

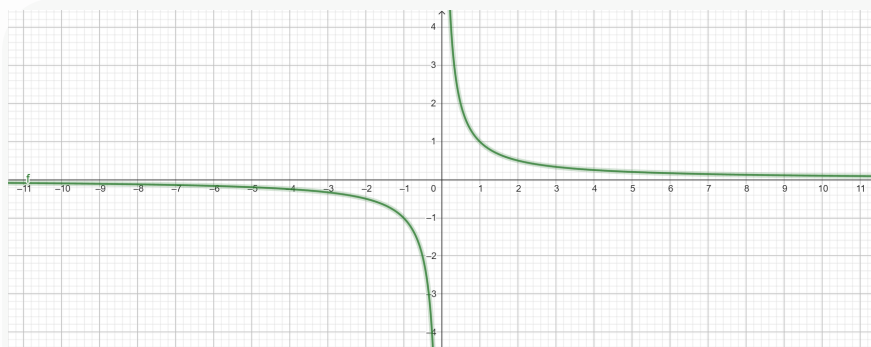
- A. $y = -4$ B. $x = -4$ C. $y = 2$ D. $x = 2$



4

Inne funkcje

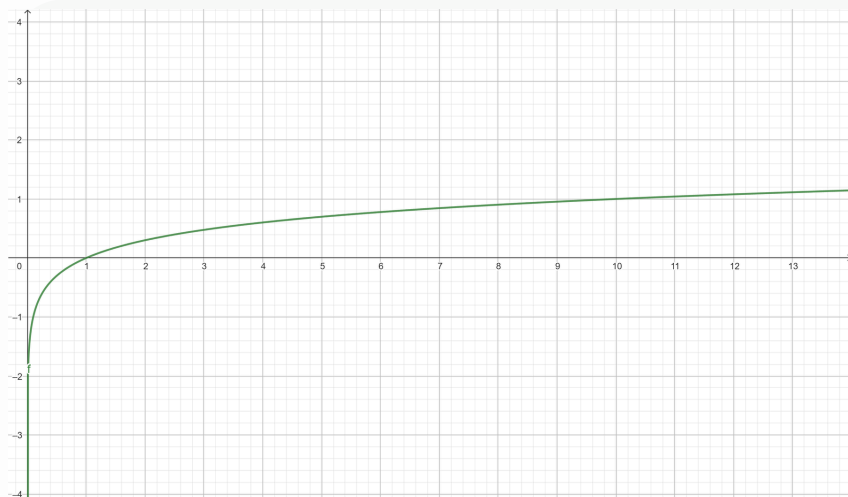
HIPERBOLA



Własności:

- $f(x) = \frac{a}{x}$
- posiada dwie asymptoty (nigdy nie przecinają się z tymi liniami) – na rysunku asymptoty są w $x=0$ i $y=0$

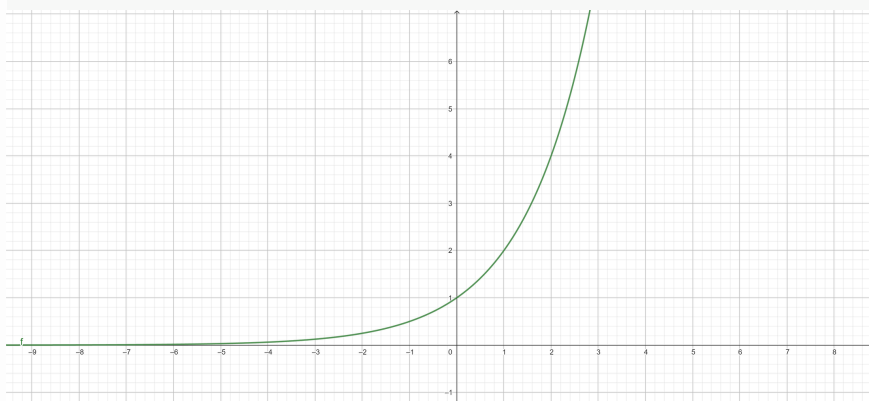
FUNKCJA LOGARYTMICZNA



Własności:

- $f(x) = \log_a x$
- $a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge x > 0$
- zawsze przecina oś X w 1

FUNKCJA WYKŁADNICZA



Własności:

- $f(x) = a^x$
- $a > 0$
- zawsze przecina oś Y w 1

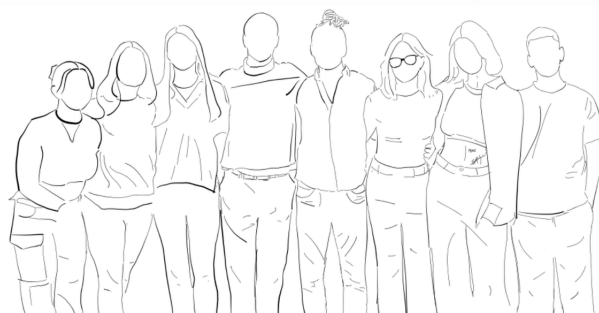
wspieramy pro **STUDENTCKU**



praktyka



nauka



przedsię
biorczość



inicjatywa

Dziękujemy za wspólną naukę. Mamy nadzieję, że zdobywanie wiedzy było dla Ciebie przyjemne. Do zobaczenia na studiach!

Powodzenia!

ŚLEDŹ DALEJ!



www.tumatura.pl



[@tuMATURA](https://www.youtube.com/@tuMATURA)

Wydane przez Fundację Kanał Studencki.
Wszelkie prawa zastrzeżone. Podręcznik
integralny z zajęciami tuMATURA, dostępnymi
na: www.tumatura.pl

KANAŁ
STUDENTCKI

I DOŁĄCZ DO
STUDENCKIEJ
SPOŁECZNOŚCI!



[@kanalstudencki](https://www.instagram.com/@kanalstudencki)



[@kanal.studencki](https://www.facebook.com/@kanal.studencki)



www.kanalstudencki.pl



kontakt@kanalstudencki.pl

Spis Treści

Czytasz notatki stworzone przez Fundację Kanał Studencki w ramach projektu Tumatura.

1 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE – ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.

