

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}, r < 1$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ciągi

Bezpłatne notatki i zadania maturalne

POZIOM PODSTAWOWY

Zgodnie z nową formułą 2023



Konkursy i nagrody na
naszym Discordzie!

www.tumatura.pl

Spis treści

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

- 1 O nas, projekt TuMatura** *str 3*
- 2 Wymogi CKE** *str 4*
- 3 Ciągi** *str 5-27*
 - Podstawy ciągów liczbowych *str 5-11*
 - Ciąg arytmetyczny *str 12-19*
 - Ciąg geometryczny *str 20-27*

Psss... sprawdź resztę naszych notatek na stronie [TuMatura.pl](https://tuMatura.pl)

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE – ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.

Obniżamy koszt przygotowania się do matury w Polsce

Czytasz notatki stworzone przez **Fundację Kanał Studencki** w ramach projektu **Tumatura**.

Jeśli uważasz nasze materiały za wartościowe – **weź udział w anonimowym badaniu** i pomóż nam zmierzyć, ile kosztuje przygotowanie się do zdania matury w Polsce.

Anonimowa ankieta

Ile kosztuje przygotowanie się do matury w Polsce?

Odpowiedz



Korzystasz z wersji wydrukowanej?
Zeskanuj kod QR i weź udział w badaniu!

Przejrzysta teoria

Studenckie typy i rady

Zadania maturalne

Wytłumaczone karty wzorów



CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE



STUDENCKI TIP OD OLI

Zastanów się, co już umiesz, a co jeszcze wymaga przećwiczenia.
Warto zaglądać tu raz na jakiś czas - wtedy lepiej widzisz postęp!

UCZEŃ...

- 1 ☐ Oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym
- 2 ☐ Oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:

$$\text{a) } \begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} a_n (1 - a_n) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$
- 3 ☐ W prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący
- 4 ☐ Sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny
- 5 ☐ Stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- 6 ☐ Stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
- 7 ☐ Wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.



Wierzę w Ciebie!

1

Podstawy ciągów liczbowych



DEFINICJA CIĄGU LICZBOWEGO

Ciąg liczbowy to sekwencja liczb ułożonych w danym porządku, zwykle według pewnego określonego wzoru/reguły.

Ciągi oznaczamy $a_n, b_n, c_n, itd.$

PRZYKŁAD 1. Przykłady ciągów liczbowych

- ciąg kolejnych liczb naturalnych : 1, 2, 3, 4, 5, ...
- ciąg liczb parzystych dodatnich : 2, 4, 6, 8, 10, ...
- ciąg liczb nieparzystych dodatnich : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...
- ciąg stały : 5, 5, 5, 5, ...
- ciąg arytmetyczny : 2, 4, 6, 8, 10, ...
- ciąg geometryczny : 3, 6, 12, 24, 48, ...

Widzimy, że dla każdego ciągu jest pewna reguła

DEFINICJA MONOTONICZNOŚCI CIĄGU

Ciąg jest monotonicznie:

- **rosnący**, jeśli każdy kolejny element jest **większy od poprzedniego**,
- **malejący**, jeśli każdy kolejny element jest **mniejszy od poprzedniego**,
- **stały**, jeśli każdy kolejny element jest **równy poprzedniemu**

Rodzaj ciągu	Ciąg rosnący	Ciąg malejący	Ciąg stały
Dowolny ciąg	$a_{n+1} > a_n$	$a_{n+1} < a_n$	$a_{n+1} = a_n$
Ciąg arytmetyczny	$r > 0$	$r < 0$	$r = 0$
Ciąg geometryczny Zależy od q i a_1	$a_1 > 0 \quad q > 1$ $a_1 < 0 \quad 0 < q < 1$	$a_1 > 0 \quad 0 < q < 1$ $a_1 < 0 \quad q > 1$	$q = 1$

NAZWA

WZÓR

PRZYKŁAD

CIĄG ARYTMETYCZNY

- WZÓR NA N-TY WYRAZ CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_n = 2 + (3 - 1) \cdot 5 = 12$$

- WZÓR NA SUMĘ N POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2 \cdot 2 + (3 - 1) \cdot 5}{2} \cdot 3 = 21$$

LUB

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

CIĄG GEOMETRYCZNY

- ILORAZ CIĄGU

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- WZÓR NA N-TY WYRAZ CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 2 \cdot 6^{3-1} = 2 \cdot 36 = 72$$

- WZÓR NA SUMĘ N POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU GEOMETRYCZNEGO:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$S_n = 2 \cdot \frac{1 - 6^3}{1 - 6} = 86$$

- SUMA WYRAZÓW NIESKOŃCZONEGO CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{3}{1 - 6} = -\frac{3}{5}$$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

CIĄGI

- Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

Z tego wzoru będziemy korzystać najczęściej – wzór na dowolny wyraz ciągu

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

Pamiętaj, że suma pierwszego wyrazu jest równa dokładnie a_1 !

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

Możemy obliczyć środkowy wyraz (np. a_2) jako średnią arytmetyczną dwóch sąsiednich (np. a_1 i a_3)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$



- Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

Z tego wzoru będziemy korzystać najczęściej – wzór na dowolny wyraz ciągu

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

Pamiętaj, że suma pierwszego wyrazu jest równa dokładnie a_1 !

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla } q \neq 1 \quad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla } q = 1$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

Związek między trzema wyrazami ciągu geometrycznego, stojącymi obok siebie (np. a_1 , a_2 , a_3)

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$



- Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, o ilorazie q .

Niech (S_n) oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n), to znaczy ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ dla $n \geq 1$.

Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg (S_n) ma granicę równą:

Suma szeregu geometrycznego (na maturze podstawowej mało nam się przyda lub wcale)

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Granicę tę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n).

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Twierdzenie o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) , określone dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, są zbieżne i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ są zbieżne, a ponadto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $b \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

- Twierdzenie o trzech ciągach

Jeżeli wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) i (c_n) , określonych dla $n \geq 1$, spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla $n \geq 1$, a ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do wspólnej granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to ciąg (b_n) jest zbieżny, a ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

- Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy K_0 złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n jest określony wzorem:

Często przydatny w zadaniach z lokatą, wpłacaniem pieniędzy do banku i tym podobne.

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Zwróć uwagę, że mamy tu $p\%$, więc jeśli w zadaniu będzie 5%, to piszemy we wzorze 5, a nie 0,05

- Wybrane granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

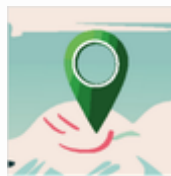
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla każdego } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{dla każdego } q \in (-1, 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{dla każdego } k > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty \quad \text{dla każdego } k > 0$$

Przykłady zadań maturalnych



tuMATURA

TuMatura to projekt społeczny Fundacji Kanał Studencki, tworzony przez przyjaciół ze studiów. Jego celem jest wyrównanie szans maturzystów w Polsce, poprzez...

YouTube

Zadanie 1.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{2n^2 - 30n}{n}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wtedy a_7 jest równy

A. (-196)

B. (-32)

C. (-26)

D. (-16)

Jedyne co robimy to we wzorze pod n podstawiamy 7 i wyliczamy :)

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{2 \cdot 7^2 - 30 \cdot 7}{7} = \frac{2 \cdot 49 - 210}{7} = \frac{98 - 210}{7} = \\ &= -\frac{112}{7} = -16 \end{aligned}$$

Zadanie 2.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{n-2}{3}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wyrazów tego ciągu mniejszych od 10 jest równa

A. 28

B. 31

C. 32

D. 27

1. Rozwiązujemy nierówność

$$\frac{n-2}{3} < 10$$

$$\frac{n-2}{3} < 10 / \cdot 3$$

$$n-2 < 30$$

$$n < 32$$

2. Odpowiedzią nie będzie 32, tylko o jeden mniejsze 31. Przeczytaj polecenie ze zrozumieniem;

3. Aby udowodnić, że odpowiedzią jest 31, podstawmy $n=32$. Otrzymujemy 10, które przecież nie jest mniejsze od 10 - jest równe!

$$\begin{aligned} n &= 32 \\ a_{32} &= \frac{32-2}{3} = \frac{30}{3} = 10 \end{aligned}$$

Zadanie 3.

Ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = 3n^2 - 25n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Liczba niedodatnich wyrazów ciągu (b_n) jest równa

A. 14

B. 13

C. 9

D. 8

1. Rozwiązujemy nierówność. Szukamy liczby **niedodatnich** wyrazów ciągu, czyli mniejszych lub równych 0

$$3n^2 - 25n \leq 0$$

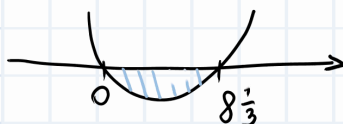
2. Otrzymujemy nierówność kwadratową

$$n(3n - 25) \leq 0$$

$$n = 0 \vee 3n - 25 = 0$$

$$3n = 25 : 3$$

$$n = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$$



$$n \in <0, 8\frac{1}{3}]$$

3. Przeanalizujemy polecenie - w poleceniu dana jest dziedzina!

$$\text{Dziedzina : } n \geq 1 \wedge n \in \mathbb{N}$$

$$n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Zadanie 4.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trzeci wyraz tego ciągu jest równy

A. 2

B. (-2)

C. 3

D. (-1)

Szukamy **trzeciego** wyrazu ciągu, więc podstawiamy **n=3** i obliczamy :)

$$a_3 = (-1)^3 \cdot \frac{3+1}{2} = (-1) \cdot \frac{4}{2} = -2$$

Twoja kolej, czyli zadania z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
również wydrukować



Zadanie 1.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2^n \cdot (n + 1)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyraz a_4 jest równy

A. 64

B. 40

C. 48

D. 80



Zadanie 2.

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 2n^2 + n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) jest malejący.

P

F

Ósmy wyraz ciągu (a_n) jest równy 136.

P

F

2

Ciąg arytmetyczny

DEFINICJA CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

Ciąg arytmetyczny to taki ciąg, w którym każdy kolejny wyraz jest większy lub mniejszy o stałą wartość nazywaną r (różnica ciągu). Ciąg liczbowy, w którym każdy kolejny wyraz różni się od poprzedniego o r .

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Każdy element ciągu arytmetycznego można wyrazić za pomocą wzoru:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

PRZYKŁAD 1. Zastosowanie wzoru na n -ty element ciągu arytmetycznego.

a_1



Początkowo mamy tylko cukierka. To nasz pierwszy wyraz ciągu

a_2



Do cukierka dostaliśmy lizaka
Lizak to różnica ciągu $- r$.

a_3



Z każdym kolejnym wyrazem zwiększamy ilość lizaków. Dodajemy $r (n-1)$ razy.

a_6



Aby obliczyć szósty wyraz ciągu, należy do a_1 dodać pięć lizaków (r).
Wzór na wyraz a_n .

PRZYKŁAD 2. Zastosowanie wzoru na n -ty element ciągu arytmetycznego - przykład liczbowy.

a_1

2

Pierwszy wyraz ciągu.

a_2

$2 + 3 = 5$

Do pierwszego wyrazu ciągu dodajemy 3 (nasza różnica).

a_3

$5 + 3 = 8$

Z każdym kolejnym wyrazem zwiększamy o 3.

a_6

$5 + (6 - 1) \cdot 3 = 20$

Szósty wyraz ciągu, należy do a_1 dodać pięć trójek (r).

PRZYKŁAD 3. Jak wygląda ciąg arytmetyczny?

Dany mamy ciąg arytmetyczny: $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 8$

wyraz
pierwszy
ciągu

wyraz
drugi
ciągu

wyraz
trzeci
ciągu

Wyliczmy różnicę ciągu: $a_{n+1} = a_n + r \Rightarrow r = a_{n+1} - a_n$

Przekształcamy wzór
aby wyliczyć r

$$r = a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3 \quad \wedge \quad r = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$$

Widzimy, że niezależnie czy odejmiemy od siebie wyraz drugi od trzeciego czy wyraz pierwszy od drugiego, otrzymujemy taki sam wynik.

Ważne, aby odjąć wyrazy sąsiednie (n od $n+1$). Nie możemy odjąć wyrazu 1 od 3, bo nie stoją obok siebie.

Wyliczmy 13-ty wyraz ciągu: $a_{13} = 1 + (13 - 1) \cdot 3$

PRZYKŁAD 4. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, gdzie $a_1 = 2$.

Idziemy do tablicy maturalnej i korzystamy z wzoru na sumę:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

a_1 i r mamy dane, a n to 10 (szukamy dziesięciu początkowych wyrazów)

$$S_{10} = \frac{2 \cdot 2 + (10 - 1) \cdot 3}{2} \cdot 10 = \frac{31}{2} \cdot 10 = 155$$

Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu arytmetycznego wynosi 155.



STUDENCKI TIP OD NATI

$\vee$ oznacza "lub" (prawie jak **lvb**)

$\wedge$ oznacza "i"

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zatrzymaj na nasz kanał na [yt](#)!)

 SUBSCRIBE

Zadanie 1.

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Jego różnica jest równa -4 , a suma jego pierwszych pięciu wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy następnych pięciu wyrazów.

Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Zapisz obliczenia.

$r = 4$

$$3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$a_1+r \quad a_1+2r \quad a_1+3r \quad a_1+4r \quad a_1+5r \quad a_1+6r \quad a_1+7r \quad a_1+8r \quad a_1+9r$

$$3(5a_1 + 10r) = 5a_1 + 35r \Rightarrow 15a_1 + 30r = 5a_1 + 35r$$

$$10a_1 = 5r \quad |:10$$

$$a_1 = \frac{5}{10}r = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

...

1. Zapisujemy warunek z polecenia

2. Wiemy, że ciąg jest arytmetyczny, dlatego wykorzystajmy to i rozpiszmy **każdy** wyraz ciągu jako **a_1** i **r**

3. Rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą (**a_1**), bo r mamy już dane :)

Zadanie 2.

W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_2 = 5$ i $a_4 = 11$. Oblicz a_5 .

A. 8

B. 14

C. 17

D. 6

$$r = a_{n+1} - a_n \quad r = a_3 - a_2 = 9 - 4 = 5$$

$$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 = a_2 - r = 4 - 5 = -1$$

$$\begin{cases} r = 5 \\ a_1 = -1 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_6 = -1 + 5 \cdot 5 = -1 + 25 = 24$$

1. Własność ciągu arytmetycznego

2. Używając wzoru z karty wzorów, mamy już wyliczone **a_1** oraz **r** , więc wyliczamy szósty wyraz ciągu

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

W tym ciągu $a_1 = -5$, $a_2 = 15$, $a_3 = -45$.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi tak, aby dla każdej z nich dokończenie poniższego zdania było prawdziwe.

Wzór ogólny ciągu (a_n) ma postać

A. $a_n = -5 \cdot (-3)^{n-1}$

B. $a_n = -5 \cdot (-3)^n$

C. $a_n = -5 \cdot 3^{n-1}$

D. $a_n = -5 \cdot \frac{(-3)^n}{3}$

E. $a_n = 5 \cdot \frac{(-3)^n}{3}$

F. $a_n = 5 \cdot (-3)^n \cdot 3$

Zadanie 4.

Czternasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8, a różnica tego ciągu jest równa $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Siódmy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{37}{2}$

B. $-\frac{37}{2}$

C. $-\frac{5}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

$a_{14} = 8$ i $r = -\frac{3}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{14} = a_1 + (14-1)r$

$8 = a_1 + 13 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 8 = a_1 - \frac{39}{2} \Rightarrow a_1 = 8 + \frac{39}{2} = \frac{16}{2} + \frac{39}{2} = \frac{55}{2}$

$a_7 = \frac{55}{2} + (7-1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{55}{2} + 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{55}{2} - \frac{18}{2} = \frac{37}{2}$

Wyliczamy **a1** ze wzoru, a następnie podstawiamy do wzoru na **a7**

Zadanie 3.

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, jest równa 16.

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Oblicz liczbę k , dla której $a_k = -78$.

$$r = -4 \quad \wedge \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} = 16$$

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$S_6 = \frac{2a_1 + (6-1)r}{2} \cdot 6 = \frac{2a_1 + 5(-4)}{2} \cdot 6 = 3(2a_1 - 20) = 6a_1 - 60$$

$$\frac{6a_1 - 60}{6} = 16 \Rightarrow 6a_1 - 60 = 96$$

$$6a_1 = 156 \Rightarrow a_1 = 26$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad m=k \quad -104 = -4k + 4$$

$$-78 = 26 + (k-1) \cdot (-4)$$

$$-4k = -108 \quad |:(-4)$$

$$k = 27$$

1. Do zapisania sumy początkowych sześciu wyrazów wykorzystajmy wzór

2. Podstawiamy nasze $r = -4$ i wyliczamy a_1

3. Pozostało podstawić wszystko co mamy do wzoru i wyliczyć k

Zadanie 4.

Czternasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8, a różnica tego ciągu jest równa $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Siódmy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{37}{2}$

B. $-\frac{37}{2}$

C. $-\frac{5}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

$$a_{14} = 8 \quad \wedge \quad r = -\frac{3}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{14} = a_1 + (14-1)r$$

$$8 = a_1 + 13 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 8 = a_1 - \frac{39}{2} \Rightarrow a_1 = 8 + \frac{39}{2} = \frac{16}{2} + \frac{39}{2} = \frac{55}{2}$$

$$a_7 = \frac{55}{2} + (7-1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{55}{2} + 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{55}{2} - \frac{18}{2} = \frac{37}{2}$$

Wyliczamy a_1 ze wzoru, a następnie podstawiamy do wzoru na a_7

Twoja kolej, czyli zadania z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
również wydrukować



Zadanie 1.

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są: $a_1 = 5$, $a_2 = 11$. Wtedy

A. $a_{14} = 71$

B. $a_{12} = 71$

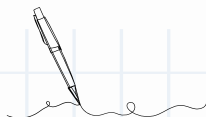
C. $a_{11} = 71$

D. $a_{10} = 71$



Zadanie 2.

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są: wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. Oblicz różnicę $a_{16} - a_{13}$.





Zadanie 3.

Dla ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek $a_4 + a_5 + a_6 = 12$. Wtedy

A. $a_5 = 4$

B. $a_5 = 3$

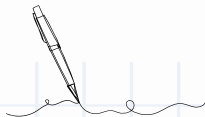
C. $a_5 = 6$

D. $a_5 = 5$



Zadanie 4.

Dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równy 30, a suma jego dwunastu początkowych wyrazów jest równa 162. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.





Zadanie 5.

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są dwa wyrazy: $a_1 = 7$ i $a_8 = -49$.
Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. -168

B. -189

C. -21

D. -42



Zadanie 6.

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, czwarty wyraz jest równy 3, a różnica tego ciągu jest równa 5. Suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ jest równa

A. -42

B. -36

C. -18

D. 6



3

Ciąg geometryczny

DEFINICJA CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

Ciąg geometryczny to taki ciąg, w którym każdy kolejny element jest uzyskiwany przez pomnożenie poprzedniego elementu przez tę samą liczbę zwaną q (iloraz ciągu). Ciąg liczbowy, w którym każdy kolejny wyraz różni się od poprzedniego q razy.

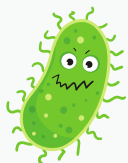
$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Każdy element ciągu geometrycznego można wyrazić za pomocą wzoru:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

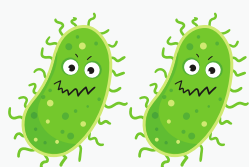
PRZYKŁAD 1. Zastosowanie wzoru na n -ty element ciągu geometrycznego.

a_1



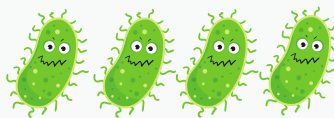
Mamy jedną bakterię.
Pierwszy wyraz ciągu (a_1).

a_2



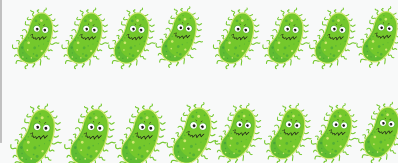
Bakterię podwajają
swoją liczbę co godzinę.
Czyli iloraz ciągu $q=2$.

a_3



Minęła kolejna godzina
i bakterie znowu się
rozmnożyły.
Dwukrotnie ($q=2$) od
godziny poprzedniej.

a_6



Po sześciu godzinach
mamy aż 24 bakterie!

PRZYKŁAD 2. Zastosowanie wzoru na n -ty element ciągu geometrycznego - przykład liczbowy.

a_1

2

pierwszy wyraz ciągu

a_2

$2 \cdot 3 = 6$

pierwszy wyraz ciągu
wymnażamy przez 3
(nasza iloraz)

a_3

$6 \cdot 3 = 18$

każdy kolejny wyraz
mnożymy przez 3

a_6

$2 \cdot 3^{6-1} = 486$

wykorzystujemy wzór
na n -ty wyraz ciągu
geometrycznego

Przykłady zadań maturalnych

Potrzebujesz więcej przykładów? Zajrzyj na nasz kanał na [yt](#)!)

 SUBSCRIBE

Zadanie 1.

Iloraz skończonego ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{3}$, trzeci wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{9}$,

a suma wszystkich wyrazów to $\frac{364}{243}$.

Oblicz, z ilu wyrazów składa się ten ciąg. Zapisz obliczenia.

1. Ciąg jest geometryczny. Mamy **q** oraz **a₃**, więc możemy wyliczyć **a₁**, które na pewno nam się przyda

2. Mamy S, q i a₁, więc możemy wyliczyć **n**, czyli z ilu wyrazów składa się nasz ciąg

$$q = \frac{1}{3}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_3 = \frac{1}{9}$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$S_n = \frac{364}{243}$$

$n = ?$

$$\frac{1}{9} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{1}{9} = a_1 \cdot \frac{1}{9} \quad | \cdot 9$$

$$a_1 = 1$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\frac{364}{243} = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{364}{243} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{364}{243} = \frac{3 \cdot \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{2}$$

$$1-\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{364}{243} \cdot \frac{2}{3} = \frac{728}{729}$$

$$1-\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{728}{729}$$

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{728}{729} - 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$n = 6$$

Zadanie 2.

Trzywyrazowy ciąg $(1 - 2a, 12, 48)$ jest geometryczny.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba a jest równa

A. (-1)

B. 3

C. 4

D. 12,5

$$a_1 = 1 - 2a$$

$$a_2 = 12$$

$$a_3 = 48$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{48}{12} = 4 = q$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{1-2a} = 4$$

$$\frac{12}{1-2a} = 4 \quad | \cdot (1-2a)$$

$$12 = 4(1-2a)$$

$$12 = 4 - 8a$$

$$-8a = 8$$

$$a = -1$$

1. Własność ciągu geometrycznego

2. Jeśli podzielimy wyraz **a₂** przez **a₁**, otrzymamy **q**. Jeśli podzielimy **a₃** przez **a₂**, to również otrzymamy **q**

3. Przyrównajmy teraz obydwa wyniki, aby wyliczyć niewiadome **a**!

Zadanie 3.

W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $a_4 = 3a_1$. Iloraz q tego ciągu jest równy

A. $q = \frac{1}{3}$

B. $q = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

C. $q = \sqrt[3]{3}$

D. $q = 3$

1. Korzystamy ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= 3a_1 \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3 \\ 3a_1 &= a_1 \cdot q^3 \quad | : a_1 \\ 3 &= q^3 \\ q &= \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

Zadanie 4.

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_9 ciągu (a_n) , w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n) . Oblicz k .

$$\begin{aligned} 2^\circ \begin{cases} S_{11} = 187 \\ a_1 + a_3 + a_9 = 12 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 1^\circ S_{11} = \frac{2a_1 + (11-1)r}{2} \cdot 11 \\ \frac{a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 8r}{3} = 12 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{11 \cdot (2a_1 + 10r)}{2} = 187 \\ \frac{3a_1 + 10r}{3} = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

$$2 \quad \frac{3a_1 + 10r}{3} = 12 \quad | \cdot 3 \Rightarrow 3a_1 + 10r = 36$$

1. Zapisujemy dane z polecenia i upraszczamy układ równań

$$11a_1 + 55r = 187 \quad | : 11$$

2. W układzie równań mamy dwie niewiadome a_1 oraz r

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1 + 5r = 17 \\ 3a_1 + 10r = 36 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 17 - 5r \\ 3(17 - 5r) + 10r = 36 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 17 - 5r \\ 51 - 15r + 10r = 36 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 17 - 5r \\ -5r = -15 \quad | : (-5) \end{cases} \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} r = 3 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

4. Czytamy przedostanie zdanie polecenia – mowa tu o ciągu geometrycznym

$$a_1 = 2 \quad a_3 = 2 + 2 \cdot 3 = 8 \quad a_k = ? = 8 \cdot 4 = 32$$

$$\frac{a_3}{a_1} = q = \frac{8}{2} = 4$$

5. Obliczamy k

$$\begin{aligned} a_k &= a_1 + (k-1) \cdot r \Rightarrow 32 = 2 + (k-1) \cdot 3 \\ 32 &= 2 + 3k - 3 \\ 3k &= 33 \quad | : 3 \Rightarrow k = 11 \end{aligned}$$

Zadanie 5.

Liczby x, y, z , których suma jest równa 114, tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Liczby te są również wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) , gdzie $n \geq 1$, w którym $x = a_1$, $y = a_4$ i $z = a_{25}$.

Oblicz liczby x, y, z . Zapisz obliczenia.

$x, y, z \rightarrow$ ciąg geometryczny
 $a_1, a_4, a_{25} \rightarrow$ ciąg arytmetyczny

1. Korzystamy z informacji, że jest to ciąg arytmetyczny

$$a_1 + a_4 + a_{25} = 114$$

$$a_1 + a_1 + 3r + a_1 + 24r = 114$$

$$3a_1 + 27r = 114 \quad | :3$$

$$a_1 + 9r = 38$$

3. Korzystamy z własności ciągu geometrycznego

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} \Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = \frac{a_{25}}{a_4} \Rightarrow a_4^2 = a_1 \cdot a_{25}$$

$$\star (a_1 + 3r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 24r)$$

$$\star a_1^2 + 6a_1r + 9r^2 = a_1^2 + 24a_1r \Rightarrow 18a_1r - 9r^2 = 0$$

$$9r(2a_1 - r) = 0$$

5. Tworzymy układ równań i wyliczamy a_1 oraz r

$$(1) \begin{cases} a_1 + 9r = 38 \\ 9r(2a_1 - r) = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 38 - 9r$$

6. Wyznaczamy a_1

$$\begin{array}{l} \text{I} \begin{cases} r = 0 \\ a_1 = 38 = x \\ y = 38 \\ z = 38 \end{cases} \quad \checkmark \quad \text{II} \begin{cases} r = 4 \\ a_1 = 2 = x \\ y = 14 \\ z = 98 \end{cases} \end{array}$$

7. Podstawiamy do (2)

$$9r(2(38 - 9r) - r) = 0$$

$$r = 0 \vee 76 - 18r - r = 0$$

$$-19r = -76$$

$$r = 4$$

Zadanie 6.

Trzy liczby, których suma jest równa 24, tworzą ciąg arytmetyczny. Po zwiększeniu ich odpowiednio o 4, 10 i 40 będą w tej samej kolejności tworzyły ciąg geometryczny.

Oblicz te trzy liczby tworzące ciąg arytmetyczny. Zapisz obliczenia.

1. Wypisujemy dane z zadania

$$b-r, b, b+r \rightarrow 8-r, 8, 8+r$$

$$b-r + b + b+r = 24 \Rightarrow 3b = 24 \Rightarrow b = 8$$

$$\begin{array}{l} 8-r+4, 8+10, 8+r+40 \rightarrow \text{ciąg geometryczny} \\ 12-r, 18, 48+r \end{array}$$

2. Własność ciągu geometrycznego

$$\frac{18}{12-r} = \frac{48+r}{18} \Rightarrow 18^2 = (12-r) \cdot (48+r)$$

3. Upraszczamy to

4. Po uproszczeniu kroku 3 otrzymujemy równanie kwadratowe

$$r^2 + 36r - 252 = 0$$

$$\Delta = 36^2 - 4 \cdot (-252) = 1296 + 1008 = 2304$$

$$\sqrt{\Delta} = 48$$

$$r_1 = \frac{36 + 48}{2} = 6 \quad r_2 = \frac{-36 - 48}{2} = -42$$

$$r = -42$$

$$r = 6$$

$$\text{Ciąg: } (50, 8, -34)$$

$$\text{Ciąg: } (2, 8, 14)$$

5. Wynikiem są dwie możliwości $r = -42$ lub $r = 6$

Potrzebujesz więcej przykładów? Zajrzyj na nasz kanał na [yt](#):)

Zadanie 7.

Pani Joanna postanowiła systematycznie oszczędzać i co miesiąc na swoje subkonto odkładać pewną sumę pieniędzy. Pierwszego czerwca 2020 roku wpłaciła 300 złotych. Pierwszego dnia każdego kolejnego miesiąca wpłacała o 25 zł więcej niż w miesiącu poprzednim.

Oblicz kwotę, jaką pani Joanna wpłaciła na subkonto pierwszego czerwca 2022 roku.

Zapisz obliczenia.

1. a_1 to pierwsza wpłata, r to każda kolejna wpłata

$$\begin{cases} a_1 = 300 \\ r = 25 \end{cases}$$

$$n = 25 \text{ miesięcy}$$

$$a_{25} = a_1 + 24r$$

$$a_{25} = 300 + 24 \cdot 25 = 900$$

Zadanie 8.

Oblicz, o ile większą kwotę niż w miesiącu poprzednim pani Joanna powinna odkładać, aby pierwszego czerwca 2025 roku (uwzględniając również wpłatę w tym dniu) na subkoncie była kwota 76 860 złotych.

Zapisz obliczenia.

$$S_{61} = \frac{2a_1 + (61-1)r}{2} \cdot 61 = \frac{2 \cdot 300 + 60r}{2} \cdot 61$$

$$\frac{600 + 60r}{2} \cdot 61 = 76860 / : 61 \Rightarrow 300 + 30r = 1260$$

$$30r = 960 / : 30$$

$$r = 32$$

Twoja kolej, czyli zadania z CKE



STUDENCKI TIP OD NATI



Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
również wydrukować



Zadanie 1.

Dane są liczby: $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$, $c = 4\sqrt{2}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

Liczby a , b oraz c tworzą w podanej kolejności

A.	ciąg arytmetyczny,	ponieważ	1.	$b = \frac{a+c}{2}$
			2.	$b = \frac{(c-a)^2}{2}$
B.	ciąg geometryczny,		3.	$b^2 = a \cdot c$



Zadanie 2.

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny $(24, 6, a-1)$. Stąd wynika, że

A. $a = \frac{5}{2}$

B. $a = \frac{2}{5}$

C. $a = \frac{3}{2}$

D. $a = \frac{2}{3}$

Zadanie 3.

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{5-2n}{6}$ dla $n \geq 1$. Ciąg ten jest

- A. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -\frac{1}{3}$.
- B. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -2$.
- C. geometryczny i jego iloraz jest równy $q = -\frac{1}{3}$.
- D. geometryczny i jego iloraz jest równy $q = \frac{5}{6}$.



Masz pytania? Napisz do nas na instagramie!



TuMatura



Kanał Stuencki

Zadanie 4.

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, są dodatnie. Wyrazy tego ciągu spełniają warunek $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$. Oblicz iloraz q tego ciągu należący do przedziału $\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \rangle$.

Zadanie 5.

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$, w którym $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_3 = 4\sqrt{2}$. Wzór na n -ty wyraz tego ciągu ma postać

A. $a_n = (\sqrt{2})^n$

B. $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

C. $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

D. $a_n = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}$

Zadanie 6.

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie i spełniony jest warunek $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

C. 3

D. $\sqrt{3}$

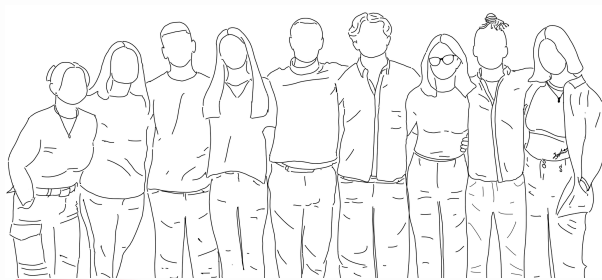
wspieramy *pro* STUDENTCKU



praktyka



nauka



przedsię
biorczość



inicjatywa

Dziękujemy za wspólną naukę. Mamy nadzieję,
że zdobywanie wiedzy było dla Ciebie
przyjemne. Do zobaczenia na studiach!

Powodzenia!

ŚLEDŹ DALEJ!



www.tumatura.pl



[@tuMATURA](https://www.youtube.com/tumatura)

KANAŁ
STUDENTCKI

I DOŁĄCZ DO
STUDENCKIEJ
SPOŁECZNOŚCI!



[@kanalstudencki](https://www.instagram.com/kanalstudencki)



[@kanal.studencki](https://www.facebook.com/kanal.studencki)



www.kanalstudencki.pl



kontakt@kanalstudencki.pl

Wydane przez Fundację Kanał Studencki.
Wszelkie prawa zastrzeżone. Podręcznik
integralny z zajęciami tuMATURA, dostępnymi
na: www.tumatura.pl

Spis Treści

Czytasz notatki stworzone przez Fundację Kanał Studencki w ramach projektu Tumatura.

1 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

3 Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Zadania maturalne

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY! Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE – ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.

