TU MATURA

możesz uczyć się tu!

Fundacja **Kanał Studencki** prezentuje

MATEMATYKA PODSTAWOWA

Zdaj maturę razem ze studenckim podręcznikiem!

MATURA 2025

TEORIA
PRZYKŁADY
ZADANIA
STUDENCKIE TIPY
I WSKAZÓWKI MATURALNE

MATERIAŁ Z NOTATEK MOŻESZ OBEJRZEĆ TAKŻE NA YOUTUBE!

@TUMATURA

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

Available

LICZBY RZECZYWISTE

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

FUNKCJE

CIĄGI

TRYGONOMETRIA

PLANIMETRIA

COMING SOON

GEOMETRIA ANALITYCZNA

STEREOMETRIA

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

OPTYMALIZACJA

Opracowanie merytoryczne: Emilia Nagłowska, Natalia Król
Korekta: Natalia Król
Oprawa graficzna i skład: Aleksandra Benowska

TU MATURA
możesz uczyć się tu!

Fundacja, która łączy świat studentów, biznesu i uczelni

#STUDENCI

#BIZNES

#UCZELNIA

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE - ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.

Fundacja Kanał Studencki

Martyna

Ola

Natalia

Kaja

Wolontariuszka

Emilia

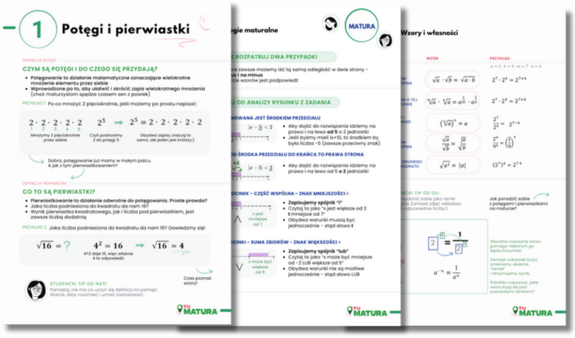
#Miejsce Twojego Rozwoju

FUNDACJA KANAŁ STUDENCKI

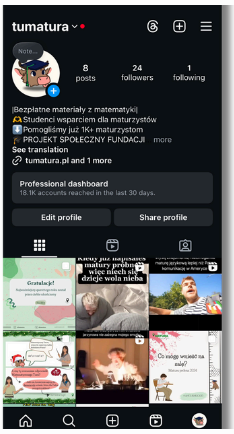
Czym jest tuMATURA?

To projekt społeczny Fundacji Kanał Studencki wyrównujący szanse maturzystów w Polsce!

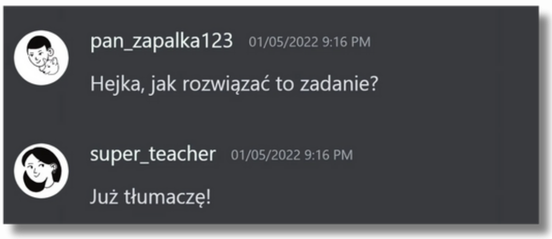
UCZ SIĘ Z NASZYMI FILMAMI NA YOUTUBE! @TUMATURA



MATERIAŁY DO NAUKI - WYDRUKUJ LUB ROZWIĄZUJ NA TABLECIE!



MATURALNE TIPY NA INSTAGRAMIE (PS. I ŚMIESZNE MEMY) @TUMATURA



ZADAWAJ PYTANIA I UCZ SIĘ Z INNYMI NA DISCORDZIE

7 Planimetria

Prosta, półprosta, odcinek i kąty

Trójkąty

Czworokąty

Okręgi

CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE

STUDENCKI TIP OD OLI

Zastanów się, co już umiesz, a co jeszcze wymaga przećwiczenia.
Warto zaglądać tu raz na jakiś czas - wtedy lepiej widzisz postęp!

UCZEŃ...

1 **wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa**

2 **rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;**

3 **rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;**

4 **korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;**

5 **stosuje własności kątów wpisanych i środkowych**

6 **stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;**

7 **stosuje twierdzenia: Talesa;**

8 **wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;**

9 **wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;**

10 **stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;**

11 **korzysta z cech podobieństwa trójkątów;**

PLANI METRIA

Wzory i własności

NAZWA	WZÓR
TWIERDZENIE PITAGORASA	$a^2 + b^2 = c^2$
TWIERDZENIE COSINUSÓW	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$
WZÓR NA POLE DELTOIDU	$P = \frac{1}{2} \cdot \lvert AC\rvert \cdot \lvert BD\rvert$
WYSOKOŚĆ W TRÓJKĄCIE RÓWNOBOCZNYM	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
POLE W TRÓJKĄCIE RÓWNOBOCZNYM	$P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ KĄTA	$\frac{\lvert AD\rvert}{\lvert BD\rvert} = \frac{\lvert AC\rvert}{\lvert BC\rvert}$
POLE KOŁA	$P = \pi r^2$
OBWÓD KOŁA	$L = 2\pi r$
POLE WYCINKA KOŁA	$P = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$
DŁUGOŚĆ ŁUKU WYCINKA KOŁA	$L = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$
WZÓR NA POLE TRAPEZU	$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$
WZORY NA POLE RÓWNOLEGŁOBOKU I ROMBU	$P = ah$ $\quad P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ $P = \frac{1}{2} \cdot \lvert AC\rvert \cdot \lvert BD\rvert \cdot \sin\gamma$
POLA FIGUR PODOBNYCH	$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$

KARTA WZORÓW

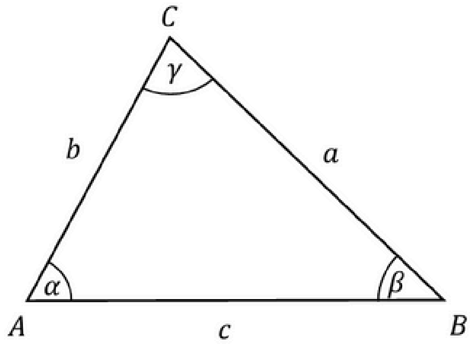
Legenda

Ważne Wzorki

<u>**TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!**</u>

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC:



a, b, c – długości boków w trójkącie ABC

α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących, odpowiednio, przy wierzchołkach A, B oraz C

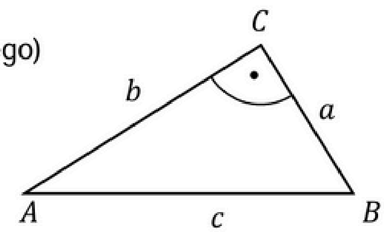
R, r – długości promieni okręgów, odpowiednio, opisanego i wpisanego w trójkąt ABC

h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta opuszczone, odpowiednio, z wierzchołków A, B i C.

p – połowa obwodu trójkąta ABC, tj.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

- <u>Twierdzenie Pitagorasa</u> (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)



Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

Niezwykle przydatne twierdzenie, skorzystasz z niego wiele razy

- <u>Twierdzenie sinusów</u>

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \qquad \frac{b}{\sin\beta} = 2R \qquad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- <u>Twierdzenie cosinusów</u>

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Twierdzenie poznaliśmy już w dziale Trygonometria - leć obczaić!

KARTA WZORÓW

<u>**TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!**</u>

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- <u>Wzory na pole trójkąta ABC</u>

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} ca \cdot \sin\beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \qquad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{\sin\gamma \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{2} c^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

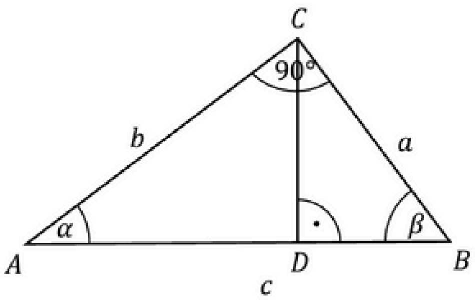
- <u>Związki miarowe w trójkącie prostokątnym</u>

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \qquad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \qquad R = \frac{1}{2} c$$

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = b \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta}$$



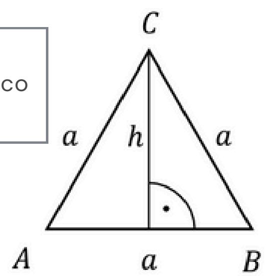
- <u>Związki miarowe w trójkącie równobocznym</u>

a – długość boku trójkąta równobocznego
h – wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3} h \qquad R = \frac{2}{3} h$$

Zobaczysz trójkąt równoboczny i już wiesz co się kroi!



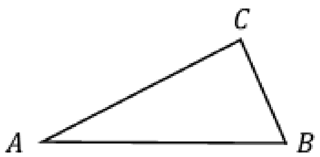
KARTA WZORÓW

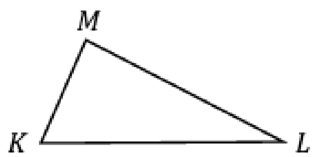
TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

Przydatne w zadaniach dowodowych

- Cechy przystawania trójkątów





a) cecha przystawania „**bok–bok–bok**" dla trójkątów ABC i KLM:

długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom boków trójkąta KLM, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$, $|CA| = |ML|$

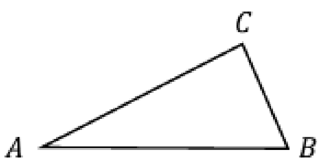
b) cecha przystawania „**bok–kąt–bok**" dla trójkątów ABC i KLM:

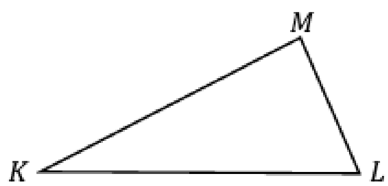
długości dwóch boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$ i $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle LKM|$

c) cecha przystawania „**kąt–bok–kąt**" dla trójkątów ABC i KLM:

długość jednego boku trójkąta ABC jest równa długości jednego boku trójkąta KLM i kąty przyległe do tego boku trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta KLM, np.: $|AB| = |KL|$ oraz $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle KLM|$ i $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle LKM|$

- Cechy podobieństwa trójkątów





a) cecha podobieństwa „**bok–bok–bok**" dla trójkątów ABC i KLM:

długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta KLM, np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$

b) cecha podobieństwa „**bok–kąt–bok**" dla trójkątów ABC i KLM:

długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|}$ i $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle LKM|$

c) cecha podobieństwa „**kąt–kąt–kąt**" dla trójkątów ABC i KLM:

kąty trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów trójkąta KLM, np.: $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle LKM|$ i $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle KLM|$ i $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle KML|$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Twierdzenie o dwusiecznej kąta

  Jeżeli dwusieczna kąta wewnętrznego (zewnętrznego) trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą zawierającą odcinek AB w punkcie D, to:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

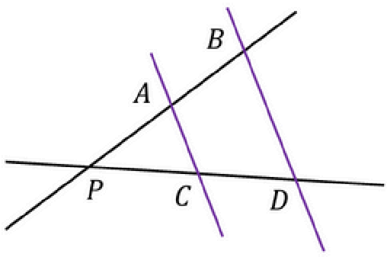
- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

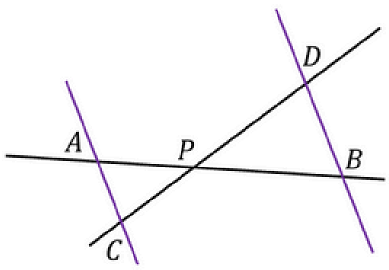
  Różne proste AB i CD przecinają się w punkcie P, przy czym spełniony jest jeden z warunków:

  – punkt A leży wewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży wewnątrz odcinka PD
  LUB
  – punkt A leży na zewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży na zewnątrz odcinka PD.

  Jeżeli $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$, to proste AC i BD są równoległe.

  Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$.

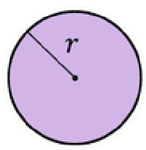




- Koło

  Pole P koła o promieniu r jest równe:

$$P = \pi r^2$$



  Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L = 2\pi r$$

KARTA WZORÓW

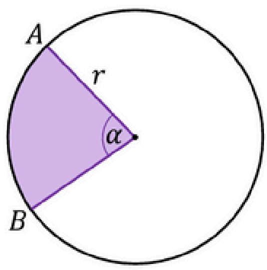
TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Wycinek koła

  Pole P wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równe:

  $$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

  Długość L łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równa:

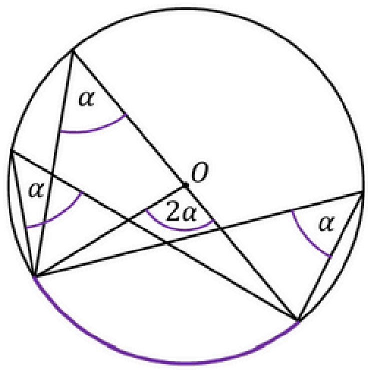
  $$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

- Kąty w okręgu

  Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

  W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

  Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O, opartych na tym samym łuku, są równe.

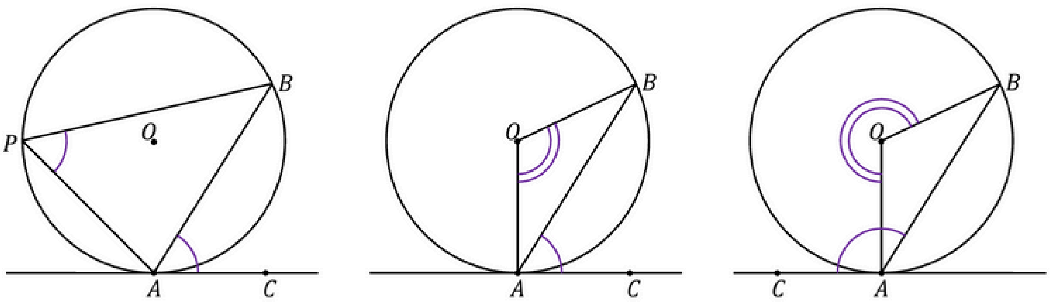
  

- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

  Dany jest okrąg o środku w punkcie O i cięciwa AB tego okręgu. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A, natomiast punkt P leży na tym okręgu i nie należy do kąta CAB. Wtedy:

  $$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CAB| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$$

  przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB.



KARTA WZORÓW

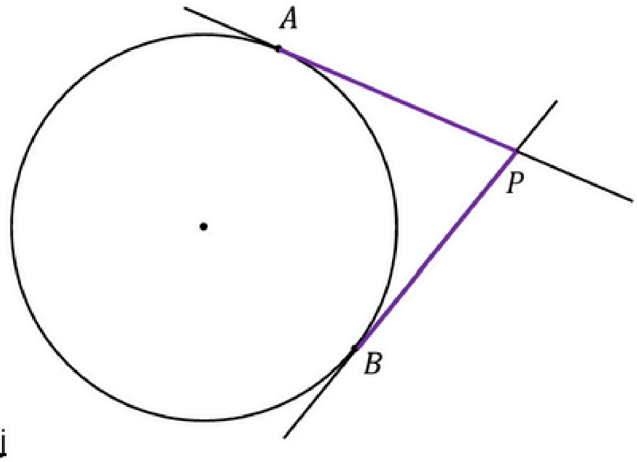
TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Twierdzenie o odcinkach stycznych

  Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to:

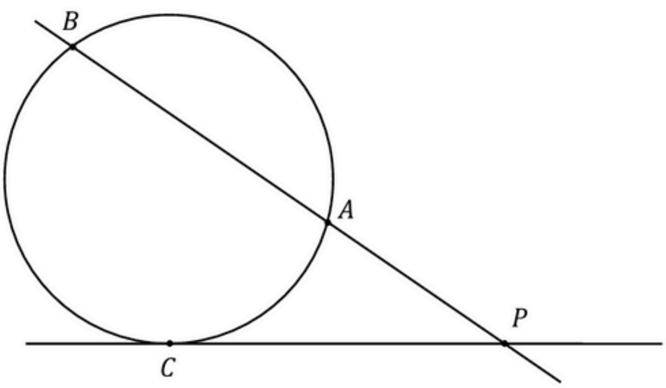
  $$|PA| = |PB|$$



- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

  Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P, to:

  $$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$

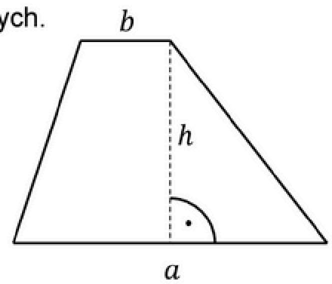


- Czworokąty

  Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
  Wzór na pole P trapezu:

  Ten wzór już zapewne znasz :D

  $$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



TU MATURA

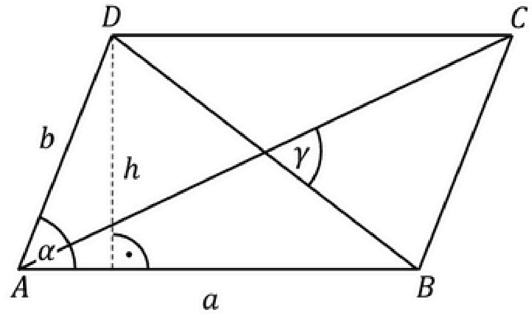
KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

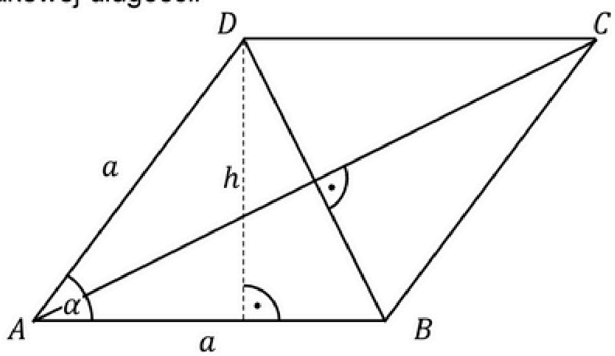
Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole P równoległoboku:

$$P = ah \qquad P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\gamma$$



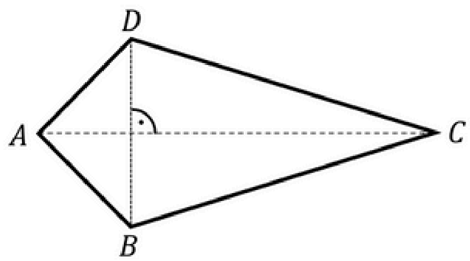
Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.
Wzory na pole P rombu:

$$P = ah \qquad P = a^2 \cdot \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid – czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.
Wzór na pole P deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

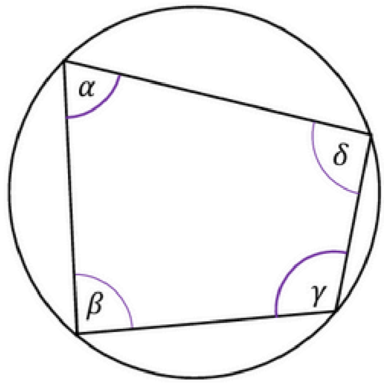
NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Okrąg opisany na czworokącie

  Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

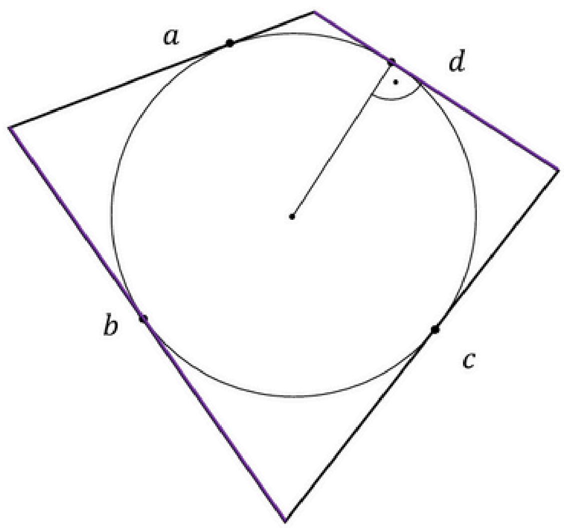
$$\alpha + \gamma = 180° \qquad \beta + \delta = 180°$$



- Okrąg wpisany w czworokąt

  W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$



- Pola figur podobnych

  Jeżeli figura $\mathcal{B}$ o polu $P_{\mathcal{B}}$ jest podobna do figury $\mathcal{A}$ o polu $P_{\mathcal{A}}$ (różnym od zera) w skali k, to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

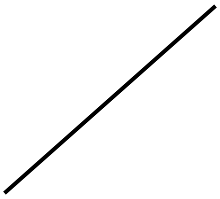
$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$$

1 Prosta, półprosta, odcinek i kąty

PROSTA, PÓŁPROSTA, ODCINEK

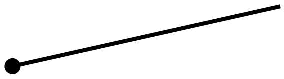
Prosta

linia bez początku i końca



Półprosta

linia z jednej strony z początkiem (oznaczonym kropeczką), z drugiej strony nieskończona

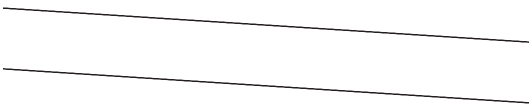


Odcinek

ma początek i koniec

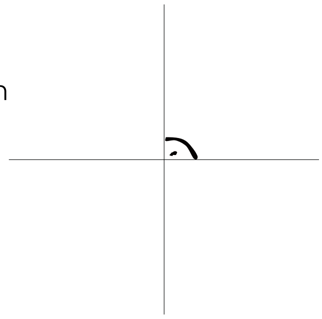
Proste równoległe

dwie proste, które nigdy się nie przecinają



Proste prostopadłe

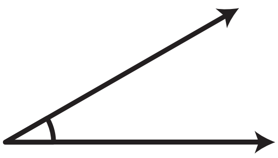
dwie proste, które przecinają się pod kątem prostym (90°)



KĄTY

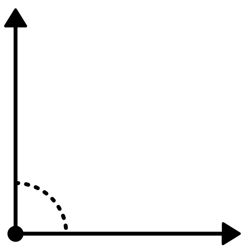
Kąt ostry

< 90°



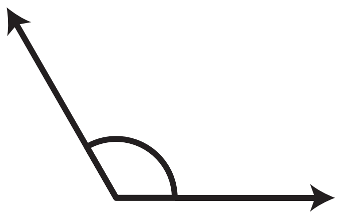
Kąt prosty

= 90°.



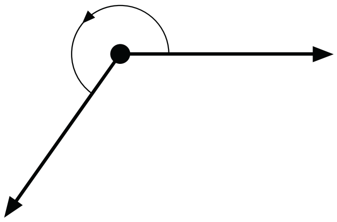
Kąt rozwarty

>90 i <180



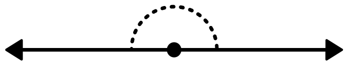
Kąt wklęsły

>180 i <360



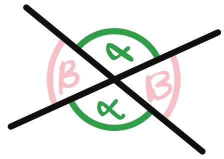
Kąt wypukły

<=180



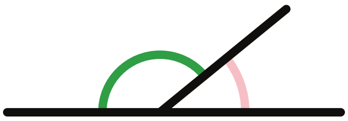
Kąt wierzchołkowy

- dwa kąty ze wspólnym wierzchołkiem
- kąty naprzeciw siebie są równe



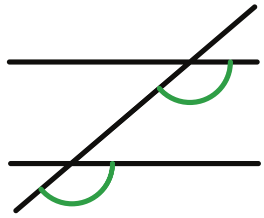
Kąt przyległy

- ich suma to 180°
- dwa kąty mające wspólne ramię



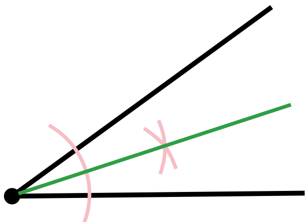
Kąty odpowiadające

- proste są równoległe i kolejna prosta je przecina
- leżą po tej samej stronie przecinającej prostej



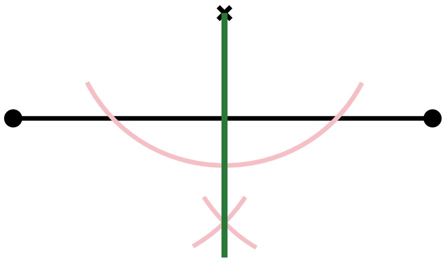
Dwusieczna

- linia dzieląca dowolny kąt w połowie (na dwie równe części)



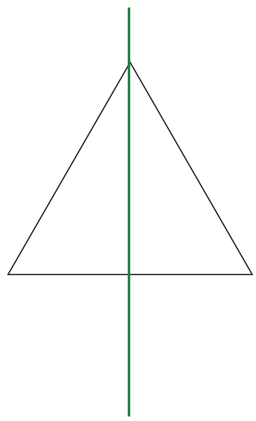
Symetralna

- prosta dzieli odcinek na pół (na dwie równe części
- ta prosta jest prostopadła do odcinka



Środkowa

- odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.
- ta prosta jes prostopadła do tego przeciwległego boku



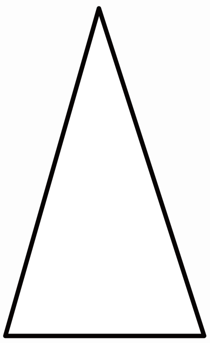
2 Trójkąty

KĄTY W TRÓJKĄCIE

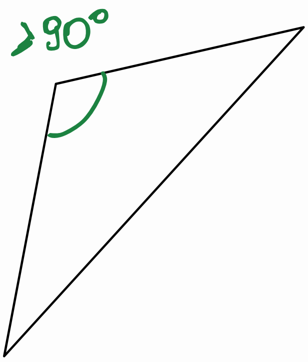
Suma kątów wewnętrznych w trójkącie zawsze jest równa 180 stopni. Trójkąt może mieć tylko jeden kąt rozwarty i tylko jeden kąt prosty.

TRÓJKĄTY I ICH RODZAJE

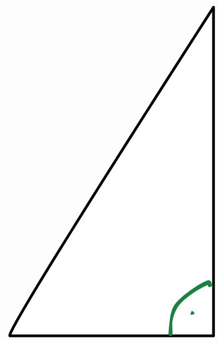
Trójkąty możemy podzielić na przykład ze względu na miary kątów:



Trójkąt ostrokątny



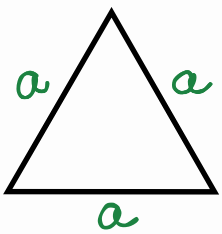
Trójkąt rozwartokątny



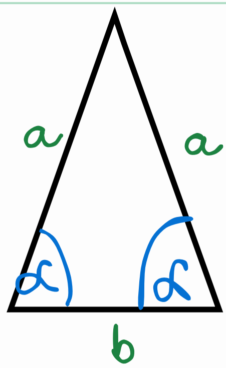
Trójkąt prostokątny

Oprócz tego możemy wyróżnić dwa szczególne rodzaje trójkątów:

Trójkąt równoboczny:
- wszystkie boki tego trójkąta są równej długości.
- wszystkie jego kąty mają po 60°



Trójkąt równoramienny:
- dwa boki trójkąta są tej samej długości
- dwa kąty tego trójkąta mają taką samą wartość



WŁASNOŚCI TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO

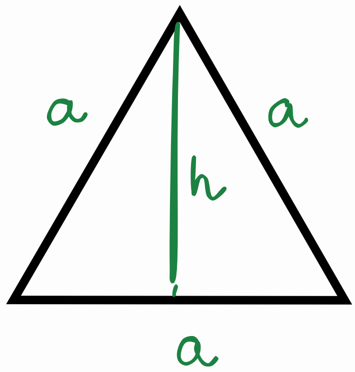
Jako że trójkąt równoboczny ma wszystkie boki tej samej długości (i każdy kąt równy jest 60 stopni), posiada także pewne charakterystyczne właściwości.

- Wysokość trójkąta możemy obliczyć z następującego wzoru.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- Istnieje także dodatkowy wzór na pole trójkąta równobocznego

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



PRZYKŁAD 1

Dany jest trójkąt, którego wszystkie boki mają po 4 cm. Oblicz jego pole.

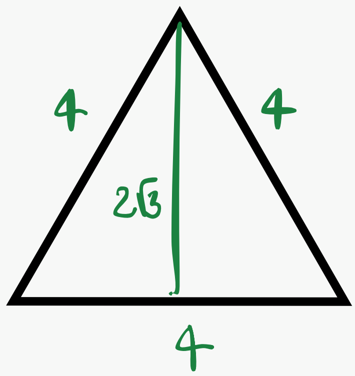
Sposób 1

1. Obliczamy wysokość trójkąta

$a = 4$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$h = 2\sqrt{3}$



2. Wykorzystujemy wzór na pole trójkąta

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}$

$P = 4\sqrt{3}$

Sposób 2

1. Obliczamy pole trójkąt z nowo poznanego wzoru na pole trójkąta równobocznego, gdzie długość boku bez potrzeby wyliczania wysokości starcza

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$a = 4$

1. wiemy, że nasz bok ma 4 cm

2. podstawiamy pod wzorek

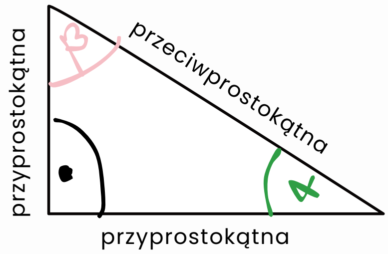
$P = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$

$P = 4\sqrt{3}$

WŁASNOŚCI TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO

Z trójkątem prostokątnym zapoznaliśmy się blisko w dziale Trygonometria. Teraz jednak zwróćmy uwagę na najważniejszej właściwości tego trójkąta

- Suma kątów ostrych jest równa 90°
- Do obliczenia brakującego boku możemy wykorzystać **Twierdzenie Pitagorasa**



Wzorek - Twierdzenie Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$\alpha + \beta = 90°$ bo

$180° - 90° = 90°$

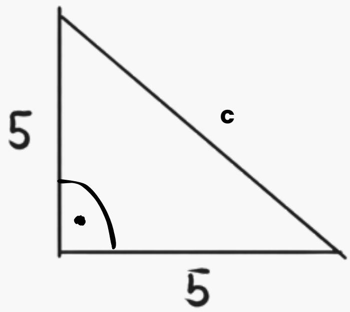
PRZYKŁAD 1

Oblicz marę trzeciego boku trójkąta wiedząc, że przyprostokątne są równe i mają 5 cm.

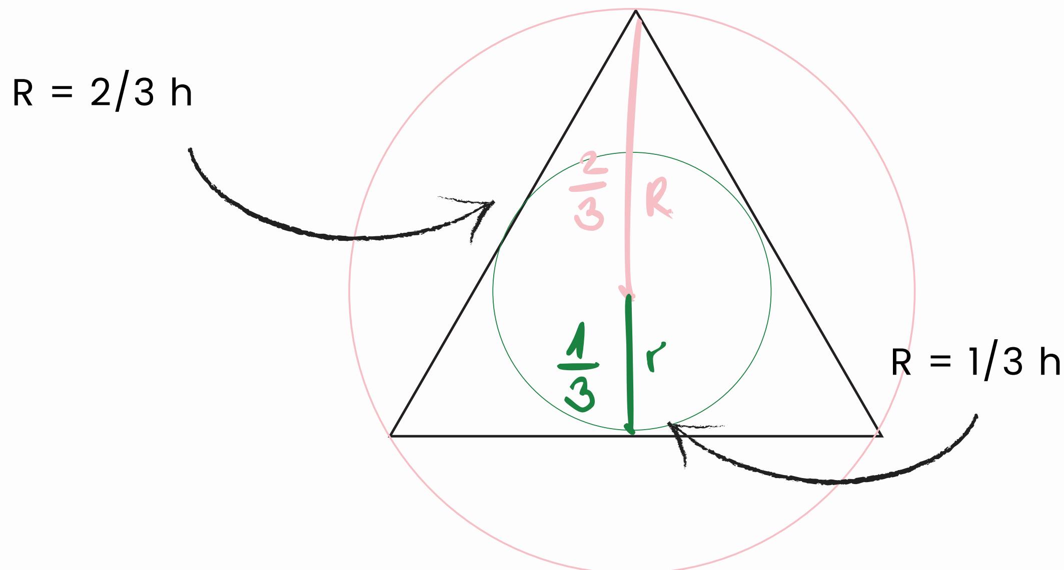
1. Trójkąt jest prostokątny
2. Masz obliczyć długość trzeciego brakującego boku

→ Wiedz, że kroi się Pitagoras

$$5^2 + 5^2 = c^2$$
$$50 = c^2$$
$$c = 5\sqrt{2}$$



TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY WPISANY W OKRĄG ORAZ OPISANY NA TRÓJKĄCIE



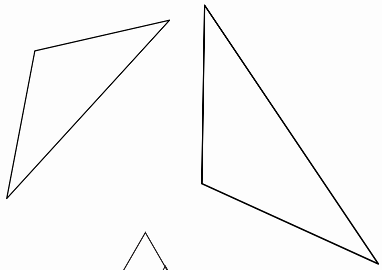
TU MATURA

PODOBIEŃSTWO TRÓJKĄTÓW

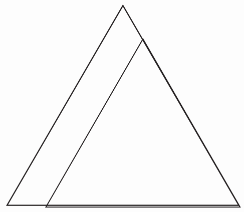
Trójkąty podobne to trójkąty, które mają takie same kąty, ale różnią się wielkością. Oznacza to, że ich odpowiednie boki są proporcjonalne, czyli stosunki długości odpowiadających sobie boków są równe.

Dwa trójkąty są podobne, jeśli spełniają jeden z poniższych warunków:

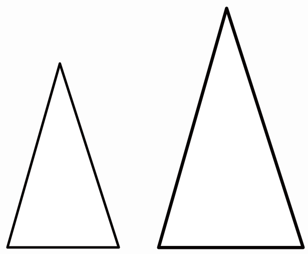
KK: (Kąt-Kąt) Dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta.



BKB: (Bok-bok-bok) Stosunki długości wszystkich trzech odpowiednich boków są równe.



BKB: (Bok-kąt-bok) Stosunki dwóch odpowiednich boków są równe, a kąty między tymi bokami są takie same.



TRÓJKĄTY PRZYSTAJĄCE

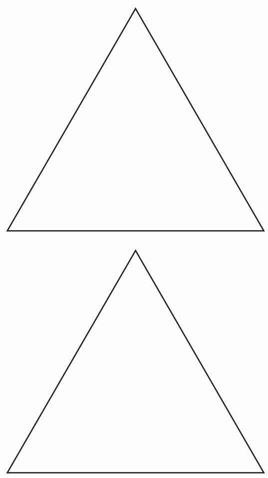
Trójkąty są przystające, jeśli mają identyczny kształt i rozmiar, czyli odpowiadające sobie boki są równe oraz odpowiadające sobie kąty są równe.

Aby sprawdzić, czy trójkąty są przystające, wystarczy spełnić jeden z następujących warunków:

bok-bok-bok: Wszystkie trzy boki jednego trójkąta są równe trzem bokom drugiego trójkąta.

bok-kąt-bok: Dwa boki i kąt między nimi w jednym trójkącie są równe odpowiednim elementom w drugim trójkącie.

kąt-bok-kąt: Dwa kąty i bok między nimi w jednym trójkącie są równe odpowiednim elementom w drugim trójkącie.



TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ KĄTA

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie mówi, że:
Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do długości dwóch pozostałych boków.

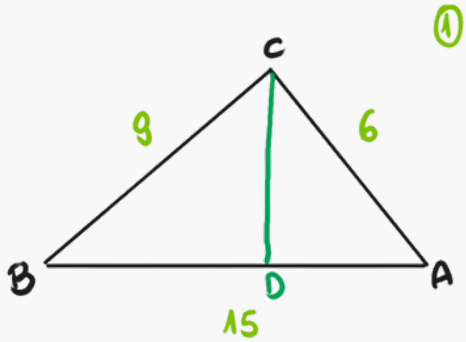
Jeśli w trójkącie ABC, dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie D, to:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

- Odcinek AD jest proporcjonalny do boku AC
- Odcinek BD jest proporcjonalny do boku BC

PRZYKŁAD 1

W trójkącie ABC Bok AB=6, AC=9, Dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie D. Długość BC=10. Chcemy znaleźć długości odcinków BD i DC



① $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

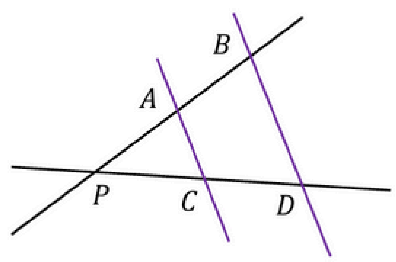
② $AD = 2x \quad BD = 3x$

③ $2x + 3x = 15$
$x = 3$

④ $AD = 2 \cdot 3 = 6$
$BD = 3 \cdot 3 = 9$

TWIERDZENIE TALESA

Twierdzenie Talesa mówi, że:
Jeśli ramiona kąta są przecięte przez dwie równoległe proste, to odcinki wyznaczone na jednym ramieniu są proporcjonalne do odpowiadających im odcinków na drugim ramieniu.



$$\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$$

- Odcinek PA i PC są proporcjonalne
- Odcinek AB i CD są proporcjonalne

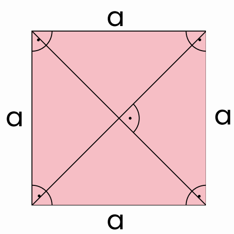
3 Czworokąty

PODSTAWOWE CZWOROKĄTY

Czworokąty można podzielić na różne typy, w zależności od długości boków, miar kątów czy symetrii. Najbardziej znane rodzaje czworokątów to kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez i deltoid. Każdy z tych typów ma unikalne właściwości. ***Suma kątów w czworokącie wynosi zawsze 360 stopni.***

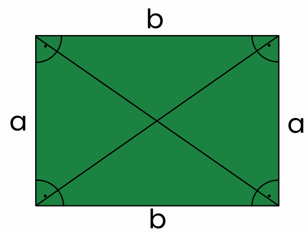
Kwadrat

- wszystkie boki są takiej samej długości
- każdy kąt ma 90 stopni
- przekątne są równe
- przekątne przecinają się pod kątem prostym (prostopadłe)
- POLE= a * a



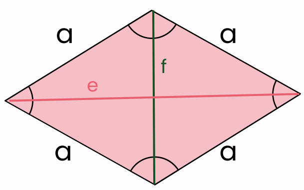
Prostokąt

- przeciwległe boki są takiej samej długości
- każdy kąt ma 90 stopni
- przekątne są równe, ale nie są prostopadłe
- POLE = a * b



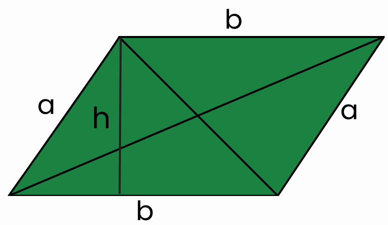
Romb

- wszystkie boki są takiej samej długości
- kąty na przeciwko są sobie równe
- przekątne przecinają się pod kątem prostym (prostopadłe)
- przekątne przecinają się w połowie
- POLE = (e * f) / 2



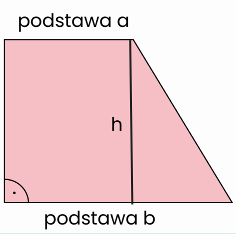
Równoległobok

- przeciwległe boki są takiej samej długości i są równoległe
- przekątne są róznej długości i nie są prostopadłe
- POLE = a * h



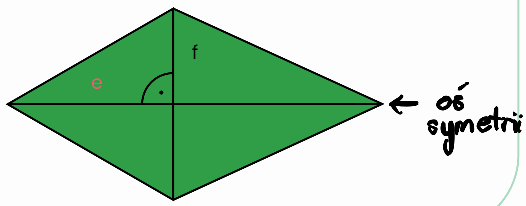
Trapez

- jedna para boków (podstawy) jest równoległa
- POLE = 1/2 * (a+b) * h



Deltoid

- dwie pary boków są takiej samej
- przekątne różnej długości, przecinają się pod kątem prostym
- jedna z przekątnych jest osią symetrii
- POLE = (e * f) / 2



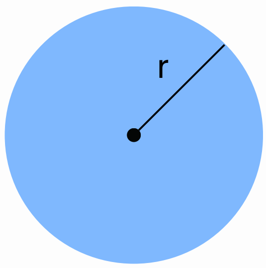
4 Koło i okrąg

KOŁO VS OKRĄG

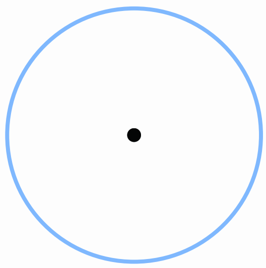
Koło to figura geometryczna złożona z punktów leżących w odległości nie większej niż promień od środka. Jego podstawowe elementy to:

Okrąg to zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, które są oddalone o tę samą odległość (promień) od danego punktu (środka okręgu) albo inaczej mówiąc jest to linia, która jest zawsze tak samo daleko od jednego punktu w środku.

KOŁO

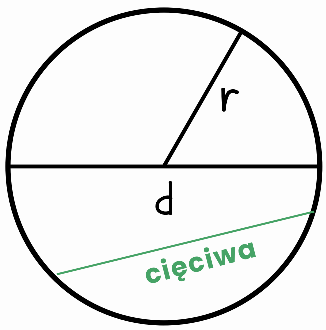


OKRĄG



PODSTAWOWE WŁAŚNOŚCI KOŁA I OKRĘGU

- Środek - punkt centralny.
- Promień (r) - odcinek od środka do obwodu
- Średnica (d) - odcinek przechodzący przez środek
- Cięciwa - dcinek łączący dwa punkty leżące na okręgu
- Obwód - długość linii otaczającej koło
- Pole - powierzchnia wewnątrz koła



OBWÓD

$$L = 2\pi r$$

POLE

$$P = \pi r^2$$

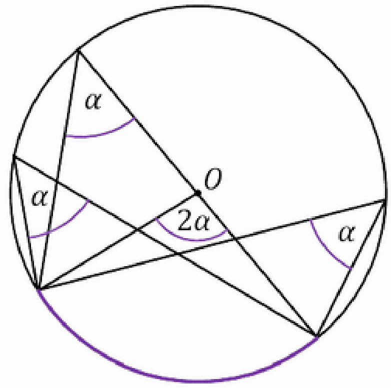
Promień ma 4 cm. Wylicz obwód i pole

$L = 2 \cdot \pi \cdot 4$ $\quad L = 8\pi$

$P = \pi \cdot 4^2$ $\quad P = 16\pi$

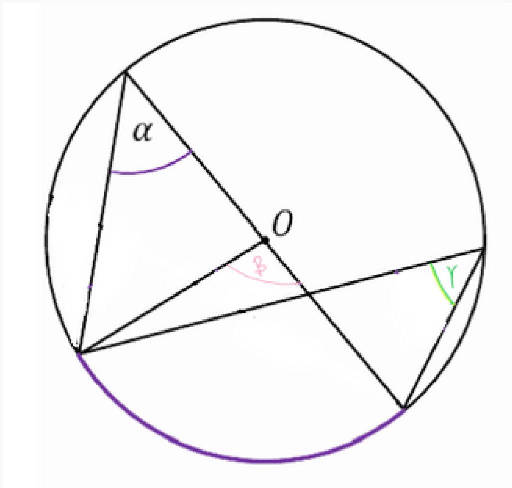
KĄTY W OKRĘGU

Kąt wpisany (a) w okręgu to kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona są cięciwami okręgu. Miara kąta wpisanego jest równa połowie miary **kąta środkowego (2a)**, opartego na tym samym łuku.



PRZYKŁAD

W podanym okręgu miara kąt a wynosi 30° podaj miary kątów β i y.



Krok 1: miara kąta β.

Zauważamy, że wszystkie trzy kąty oparte są na tym samym łuku a kat a jest kątem wpisanym, dlatego też wiemy że β jako kąt środkowy będzie dwa razy większa niż kat a czyli jego miara wynosi 60°.

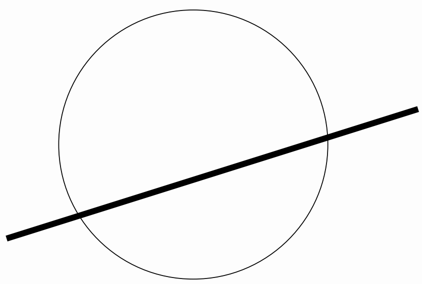
Krok 2: miara kąta

Analogicznie z kątem y skoro jest oparty na tym samym łuku co a oraz także jest kątem wpisanym znaczy, że będzie miał taką samą miarę jak kąt a czyli 30°

SIECZNA I STYCZNA

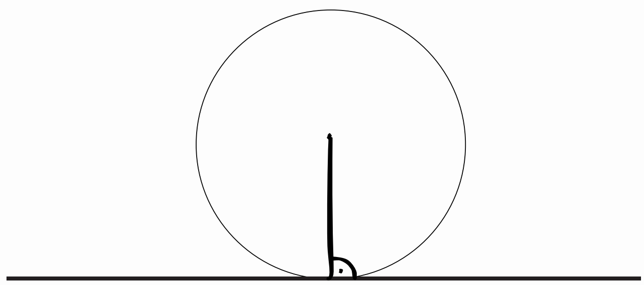
Sieczna

- prosta, która przecina okrąg w dróch punktach



Styczna

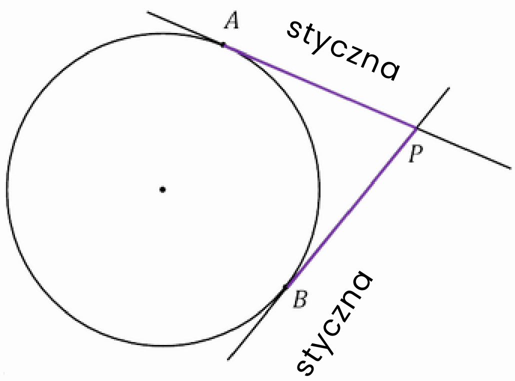
- prosta, która ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny i jest do niego prostopadła w punkcie styczności.



TWIERDZENIE O ODCINKACH STYCZNYCH

Jeśli A i B są styczne do okręgu i przecinają się w punkcje P to |PA| i |PB| mają taką samą długość

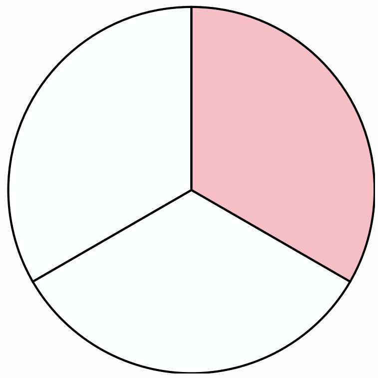
- A i B to punkty styczności
- styczne przecinają się w punkcie P
- **to odcinki |PA| = |PB|**



WYCINEK KOŁA

Wycinek koła to fragment koła, który wygląda jak "kawałek pizzy". Jest ograniczony dwoma liniami (promieniami) wychodzącymi ze środka koła i łukiem obwodu. Jego pole możemy obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



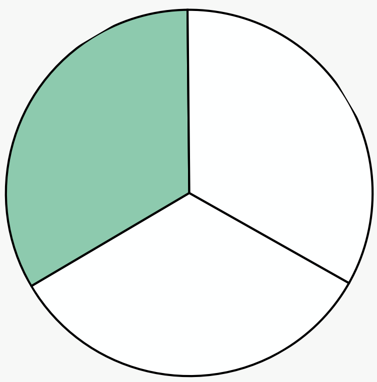
A długość łuku:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

PRZYKŁAD DLA CIEBIE

Wiedząc że długość łuku (L) jest równa 4π, promień (r) = 6. Oblicz miarę kąta a następnie oblicz pole wycinka koła.

Krok 1: Oblicz miarę kąta

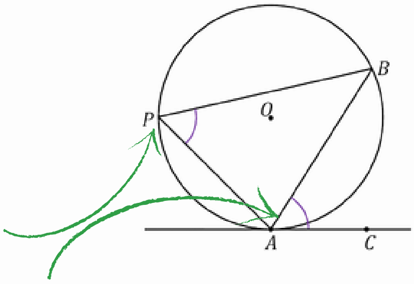


Krok 2: Oblicz pole wycinka koła.

TWIERDZENIE O KĄCIE MIĘDZY STYCZNĄ I CIĘCIWĄ

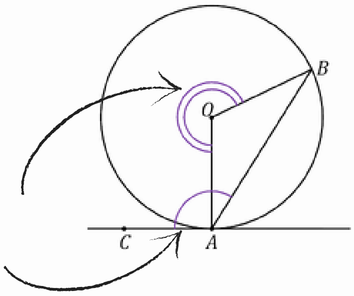
Kąt między styczną a cięciwą jest połową kąta środkowego, który ma ten sam łuk. Aby to zrozumieć rozważymy trzy przypadki zawarte w kartach zbiorów

Kąty są takie same



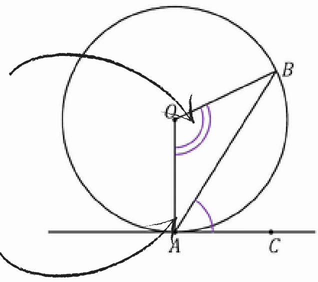
Ten kąt jest 2 razy większy niż

ten kąt



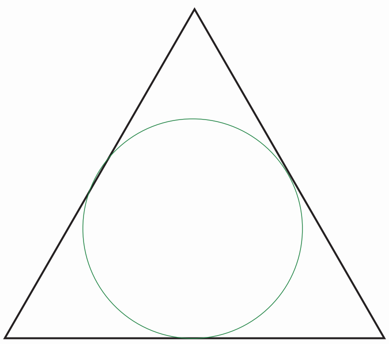
Ten kąt jest 2 razy większy niż

ten kąt

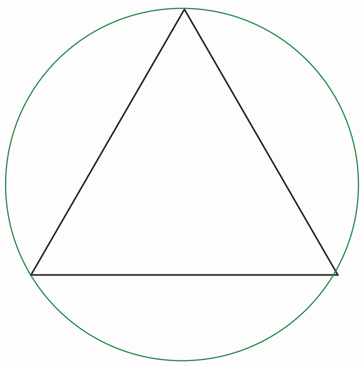


OKRĄG WPISANY W FIGURĘ VS OKRĄG OPISANY NA FIGURZE

Bardzo często podane wyrażenia bierzemy za jednoznaczne i nie zauważamy różnicy, ta jednak występuje.



Okrąg WPISANY W trójkąt



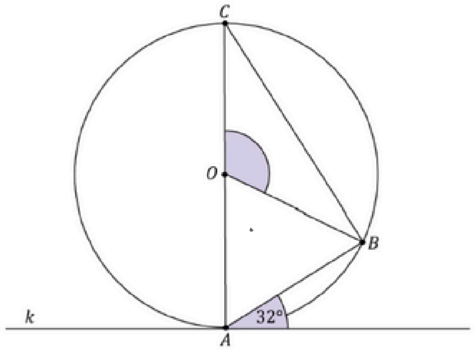
Okrąg OPISANY NA trójkącie

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 1.

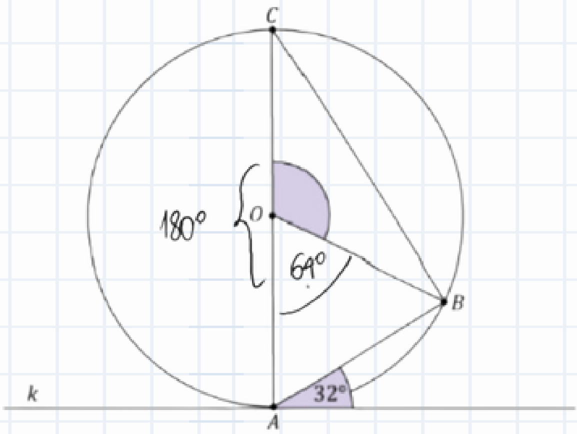
Punkty A, B oraz C leżą na okręgu o środku w punkcie O. Prosta k jest styczna do tego okręgu w punkcie A i tworzy z cięciwą AB kąt o mierze $32°$. Ponadto odcinek AC jest średnicą tego okręgu (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta rozwartego BOC jest równa

A. $148°$ **B.** $116°$ **C.** $154°$ **D.** $122°$



1. Zgodnie z twierdzeniem o kącie między styczną a cięciwą wiemy że $\sphericalangle AOB = 32° \cdot \boxed{2 =} 64°$

2. $\sphericalangle AOB$ $\sphericalangle BOC$ są przystające dlatego
$180° - 64° = \underline{116°}$

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 2.

Koło ma promień równy 3.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

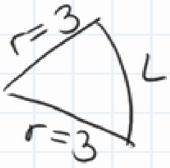
Obwód wycinka tego koła o kącie środkowym 30° jest równy

A. $\frac{3}{4}\pi$ **B.** $\frac{1}{2}\pi$ **C.** $\frac{3}{4}\pi + 6$ **D.** $\frac{1}{2}\pi + 6$

1. Zastanawiamy się z czego składa się obwód odcinka

2. Obliczamy długość łuku

$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$



3. $L = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3 = \frac{1}{2}\pi$

4. Obw $= 3 + 3 + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + 6$

Zadanie 3.

W okręgu O kąt środkowy β oraz kąt wpisany α są oparte na tym samym łuku. Kąt β ma miarę o 40° większą od kąta α.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta β jest równa

A. 40° **B.** 80° **C.** 100° **D.** 120°

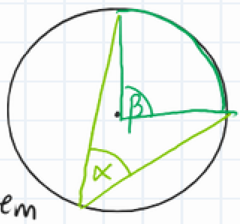
1. Wiemy że

$\alpha + 40^\circ = \beta$

a także

$2\alpha = \beta$

ponieważ β jest kątem środkowym a kąt α wpisanym



2. Skoro

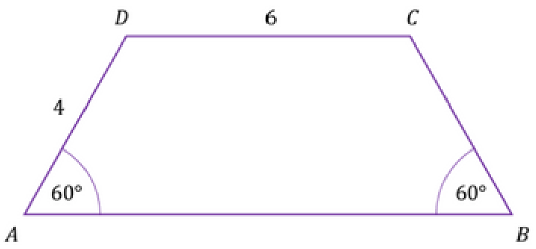
$\alpha + \alpha = \beta$
$\alpha + 40^\circ = \beta$ to $\alpha = 40^\circ$
$\beta = 80^\circ$

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

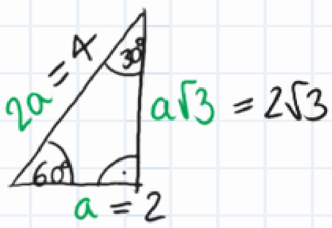
Zadanie 4.

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym podstawa CD ma długość 6, ramię AD ma długość 4, a kąty BAD oraz ABC mają miarę 60° (zobacz rysunek).

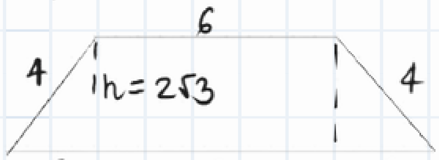


Oblicz pole tego trapezu. Zapisz obliczenia.

1. Zauważamy wyjątkowy trójkąt



2. Patrzymy jakie dane już mamy



$2 + 6 + 2 = 10$

3. Wzór na pole trapezu $P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$

4. Podstawiamy $P = \frac{16}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \underline{\underline{16\sqrt{3}}}$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

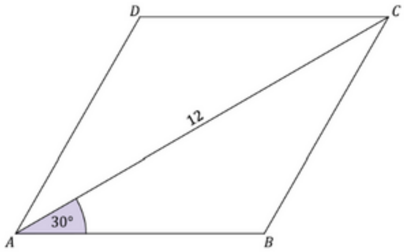
STUDENCKI TIP OD NATI

Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz
też wydrukować

Zadanie 1.

W rombie $ABCD$ dłuższa przekątna AC ma długość 12 i tworzy z bokiem AB kąt o mierze 30° (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole rombu $ABCD$ jest równe

A. 24 **B.** 36 **C.** $24\sqrt{3}$ **D.** $36\sqrt{2}$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 2.

W trójkącie ABC długość boku AC jest równa 3, a długość boku BC jest równa 4. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

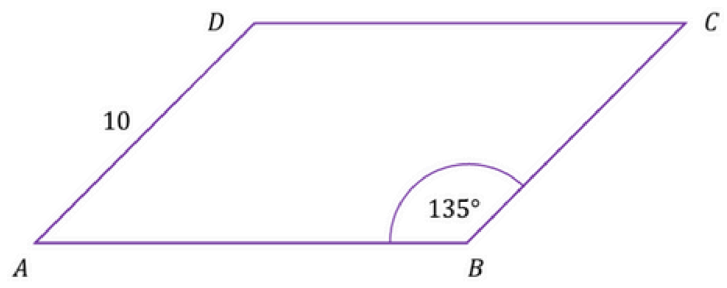
Stosunek $|AD| : |DB|$ jest równy

A. $4 : 3$ **B.** $4 : 7$ **C.** $3 : 4$ **D.** $3 : 7$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 3.

Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe $40\sqrt{6}$. Bok AD tego równoległoboku ma długość 10, a kąt ABC równoległoboku ma miarę $135°$ (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

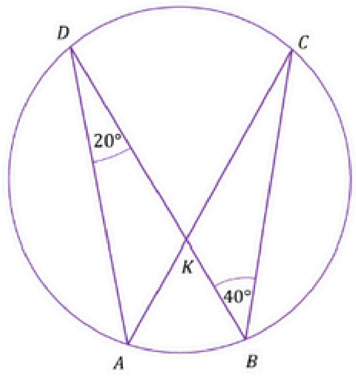
Długość boku AB jest równa

A. $8\sqrt{3}$ **B.** $8\sqrt{2}$ **C.** $16\sqrt{2}$ **D.** $16\sqrt{3}$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 4.

Na łukach AB i CD okręgu są oparte kąty wpisane ADB i DBC, takie, że $|\sphericalangle ADB| = 20°$ i $|\sphericalangle DBC| = 40°$ (zobacz rysunek). Cięciwy AC i BD przecinają się w punkcie K.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

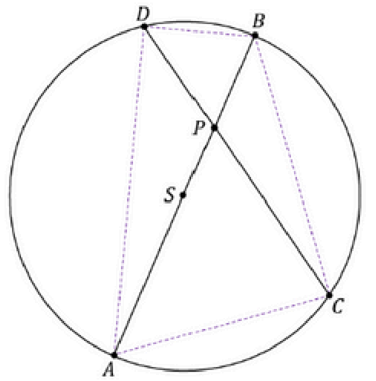
Miara kąta DKC jest równa

A. $80°$ **B.** $60°$ **C.** $50°$ **D.** $40°$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 5.

Dany jest okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie S. Średnica AB tego okręgu przecina cięciwę CD w punkcie P (zobacz rysunek). Ponadto: $|PB| = 4$, $|PC| = 8$ oraz $|PD| = 5$.



Oblicz promień okręgu $\mathcal{O}$. Zapisz obliczenia.

wspieramy po STUDENTCKU

praktyka

nauka

przedsiębiorczość

inicjatywa

Dziękujemy za wspólną naukę. Mamy nadzieję, że zdobywanie wiedzy było dla Ciebie przyjemne. Do zobaczenia na studiach!

Powodzenia!

ŚLEDŹ DALEJ!

TU MATURA

www.tumatura.pl

@tuMATURA

@tumatura

FUNDACJA KANAŁ STUDENCKI

I DOŁĄCZ DO STUDENCKIEJ SPOŁECZNOŚCI!

@kanalstudencki

@kanal.studencki

www.kanalstudencki.pl

kontakt@kanalstudencki.pl