TU MATURA
możesz uczyć się tu!

Fundacja **Kanał Studencki** prezentuje

MATEMATYKA PODSTAWOWA

Zdaj maturę razem ze studenckim podręcznikiem!

MATURA 2025

TEORIA
PRZYKŁADY
ZADANIA
STUDENCKIE TIPY
I WSKAZÓWKI MATURALNE

MATERIAŁ Z NOTATEK MOŻESZ OBEJRZEĆ TAKŻE NA YOUTUBE!
@TUMATURA

Co dla Ciebie przygotowaliśmy?

Available

LICZBY RZECZYWISTE

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

FUNKCJE

CIĄGI

TRYGONOMETRIA

COMING SOON

PLANIMETRIA

GEOMETRIA ANALITYCZNA

STEREOMETRIA

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

OPTYMALIZACJA

Opracowanie merytoryczne: Emilia Nagłowska, Natalia Król
Korekta: Natalia Król
Oprawa graficzna i skład: Aleksandra Benowska

TU MATURA
możesz uczyć się tu!

Fundacja, która łączy świat studentów, biznesu i uczelni

Kochani Maturzyści!

Cieszymy się, że sięgnęliście po nasze pomoce naukowe. Życzymy Wam miłej nauki i mamy nadzieję, że nauka matematyki okaże się dla Was przyjemnością. Piszcie do nas śmiało i korzystajcie z tuMATURY!

POWODZENIA! PAMIĘTAJCIE - ROZWIJAMY SIĘ DLA WAS. MOŻECIE NA NAS LICZYĆ.

Fundacja Kanał Studencki

Martyna

Ola

Natalia

Kaja

Wolontariuszka

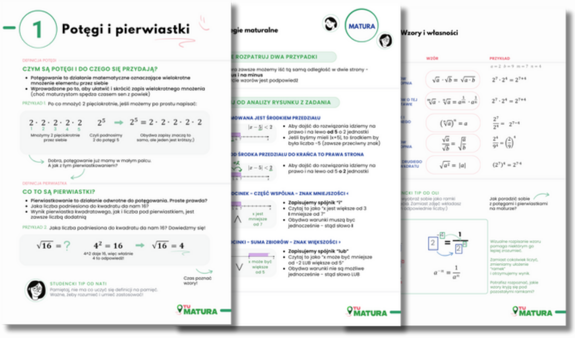
Emilia

#Miejsce Twojego Rozwoju

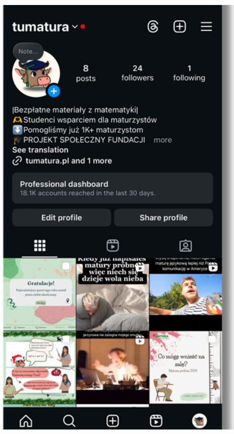
Czym jest tuMATURA?

To projekt społeczny Fundacji Kanał Studencki wyrównujący szanse maturzystów w Polsce!

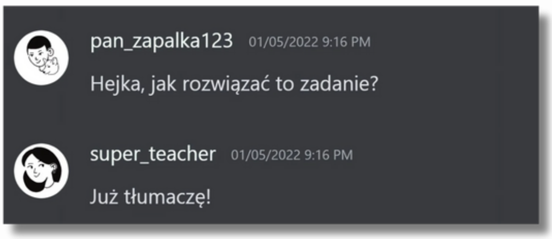
UCZ SIĘ Z NASZYMI FILMAMI NA YOUTUBE! @TUMATURA



MATERIAŁY DO NAUKI - WYDRUKUJ LUB ROZWIĄZUJ NA TABLECIE!



MATURALNE TIPY NA INSTAGRAMIE (PS. I ŚMIESZNE MEMY) @TUMATURA



ZADAWAJ PYTANIA I UCZ SIĘ Z INNYMI NA DISCORDZIE

TU MATURA
możesz uczyć się tu!

6 Trygonometria

Funkcje trygonometryczne
Wyjątkowe trójkąty
Twierdzenie cosinusów
Pole trójkąta

CHECKLISTA WYMAGAŃ SZCZEGÓŁOWYCH - CKE

STUDENCKI TIP OD OLI

Zastanów się, co już umiesz, a co jeszcze wymaga przećwiczenia.
Warto zaglądać tu raz na jakiś czas - wtedy lepiej widzisz postęp!

UCZEŃ...

1 ○ **Wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;**

2 ○ **Korzysta z wzorów:**

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \frac{sin\alpha}{\cos\alpha}$$

3 ○ **Stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta**

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

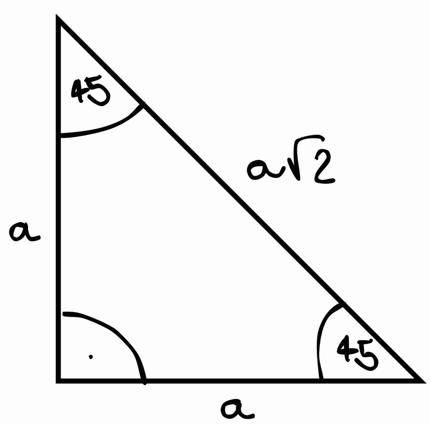
4 ○ **Oblicza kąty trójkąta prostokątnego i długości jego boków przy odpowiednich danych**

TRYGON
OMETRIA

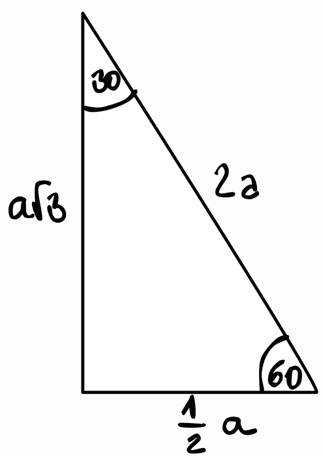
Wzory i własności

NAZWA	WZÓR
JEDYNKA TRYGONOMETRYCZNA	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
WZÓR NA TANGENS ZNAJĄC SIN I COS	$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
NA SINUS KĄTA ROZWARTEGO	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
NA COSINUS KĄTA ROZWARTEGO	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
NA TANGENS KĄTA ROZWARTEGO	$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$
TWIERDZENIE COSINUSÓW	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
POLE TRÓJKĄTA	$P = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma$

- TRÓJKĄT 45 45 90



- TRÓJKĄT 30 60 90



KARTA WZORÓW

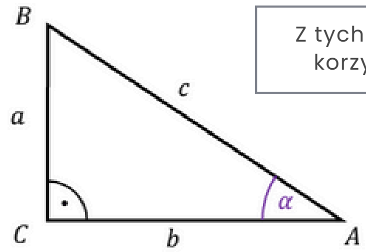
TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

!



Z tych wzorów będziemy korzystać najczęściej

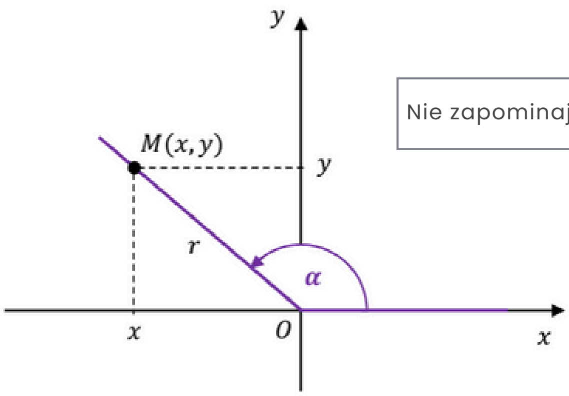
- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \text{o ile } x \neq 0$$

gdzie

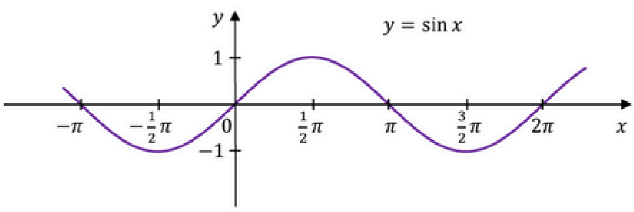
$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

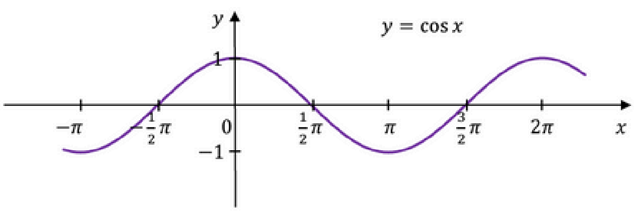
!



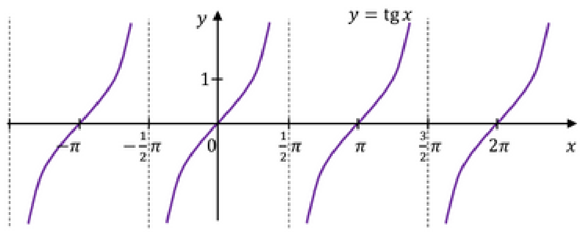
Nie zapominaj o "-" przy tg i cos

- Wykresy funkcji trygonometrycznych





Na maturze podstawowej raczej nie skorzystasz z wykresów



KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

Przydatne przy stosowaniu wzorów redukcyjnych i twierdzeniu cosinusów. Z tej tabelki zdecydowanie będziemy dużo korzystać.

- Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

!

- Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów α oraz β prawdziwe są równości:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad \text{gdy} \quad \alpha,\beta,\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad \text{gdy} \quad \alpha,\beta,\alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{o ile } \operatorname{tg}\alpha \text{ istnieje i } \operatorname{tg}^2\alpha \neq 1$$

- Wybrane wzory redukcyjne

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

!

Najczęściej będziesz poproszony
o policzenie funkcji 120°, 135° i 150°

KARTA WZORÓW

TAKĄ KARTĘ DOSTANIESZ NA MATURZE!

NA CO ZWRÓCIĆ UWAGĘ?

- Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

- Okresowość funkcji trygonometrycznych

Dla każdego kąta α i liczby całkowitej k prawdziwe są związki:

$$\sin(\alpha + k\cdot 360^\circ) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + k\cdot 360^\circ) = \cos\alpha$$

Ponadto jeżeli $\alpha \neq 90^\circ + m\cdot 180^\circ$ (gdzie $m \in \mathbb{Z}$), to:

$$\mathrm{tg}(\alpha + k\cdot 180^\circ) = \mathrm{tg}\,\alpha$$

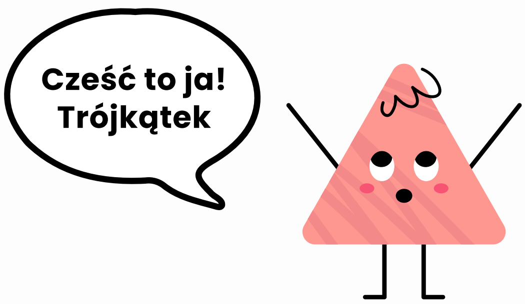
1 Funkcje trygonometryczne

CZYM ZAJMUJE SIĘ TRYGONOMETRIA?

Trygonometria to dział matematyki, który zajmuje się badaniem trójkątów, zwłaszcza trójkątów prostokątnych. Służy do opisywania zależności między bokami i kątami trójkąta.

W skrócie

Proporcje boków w trójkącie prostokątnym. Operujemy na kątach

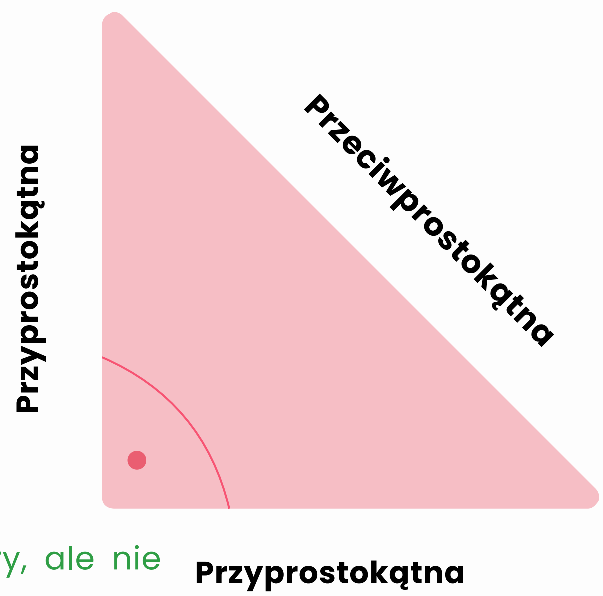


KILKA PODSTAWOWYCH DEFINICJI

Trójkąt prostokątny – trójkąt, który ma TYLKO jeden kąt prosty (90°).

Przeciwprostokątna – najdłuższy bok w trójkącie prostokątnym, leży naprzeciw kąta prostego (90°).

Przyprostokątna – każdy z dwóch krótszych boków w trójkącie prostokątnym. Są one przyległe do kąta prostego. Jeden z nich przylega do kąta, który rozpatrujemy, a drugi leży naprzeciw niego.



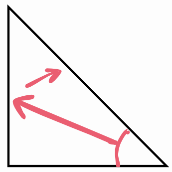
To są dwie siostry, ale nie bliźniaczki!
Mogą mieć różne długości

FUNCKJE TRYGONOMETRYCZNE JAKIE POZNASZ

Na poziomie podstawowym poznajemy trzy funkcje trygonometryczne. Oto one:

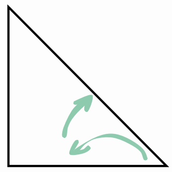
SINUS (sin) – stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$



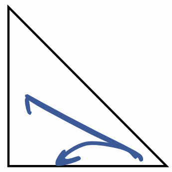
Cosinus (cos) – stosunek długości przyprostokątnej przylegającej do kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$



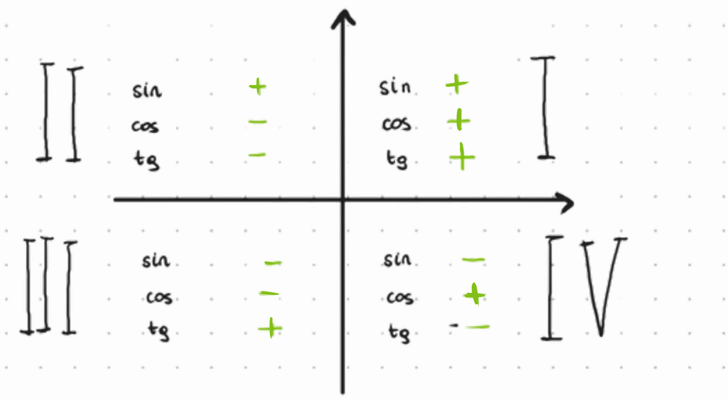
Tangens (tan) – stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przyprostokątnej przylegającej do kąta.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$



PST! Jest jeszcze cotanges, ale nie musisz go umieć na maturze podstawowej.

JAKIE WARTOŚCI PRZYJMUJĄ FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE W KAŻDEJ ĆWIARTCE



Na maturze podstawowej skupimy się jedynie na pierwszej i drugiej ćwiartce.

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DLA WYBRANYCH KĄTÓW

	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

STUDENCKI TIP OD EMI

Nie musisz pamiętać tych wartości.
Wszystko znajdziesz w tablicach wzorów!

Może się zdarzyć, że zostaniesz poproszony o obliczenie funkcji sinus, cosinus lub tangens dla kąta większego niż 90°. W takim wypadku nie użyjesz wcześniej poznanych wzorów. Z pomocą przychodzi karta z wzorami matematycznymi w dziale trygonometria znajdziesz poniższy rysunek.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

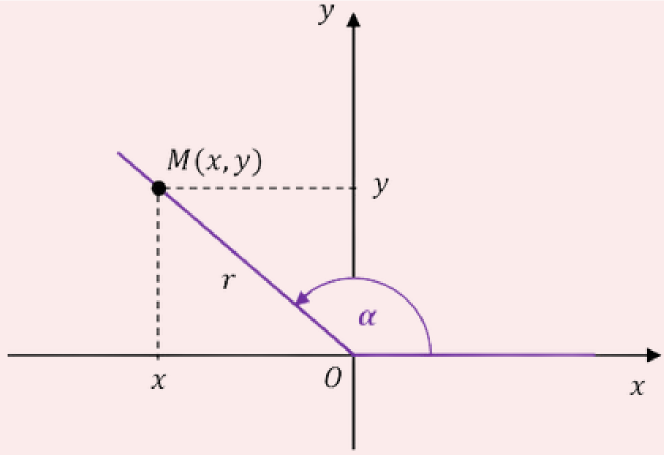
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \text{o ile } x \neq 0$$

gdzie

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

|OM| to długość odcinka od punkty O do punktu M



M to punkt o współrzędnych (x,y). Długość odcinka x i y, odczytujemy z osi współrzędnych.

Jak obliczyć funkcje za pomocą powyższych wzorów?

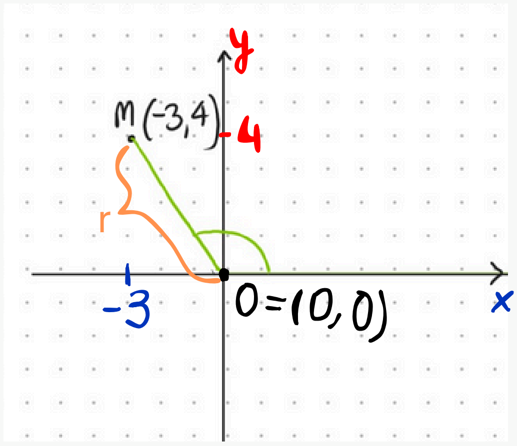
PRZYKŁAD 1

Załóżmy, że nasz punkt M ma współrzędne (-3, 4). Policzmy zatem sin, cos i tg

1. Liczymy z twierdzenia Pitagorasa długość r, czyli długość odcinka |MO|=|OM|

$$(3)^2 + 4^2 = r^2$$
$$9 + 16 = 25$$
$$r^2 = 25$$
$$r = 5$$

$=|OM|=|MO|$



2. wyznaczamy x i y

$$x = -3$$
$$y = 4$$

3. obliczamy sin, cos i tg, czyli teraz tylko podstawiamy do wzorków

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

STUDENCKI TIP OD NATI

Tak jak długość odcinka x odczytujemy z osi X, tak długość r=|OM| nie możemy odczytać z wykresu lub zmierzyć na oko, trzeba go policzyć.
Czemu? Leży on ukośnie względem osi współrzędnych.

Co jeśli nie znamy współrzędnych punktu M? Wtedy z pomocą przychodzą poniższe wzory są to tzw. wzory redukcyjne.

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$$

Jak to działa?

PRZYKŁAD 1

Chcemy obliczyć sin 135°

1. Korzystamy z tego wzoru:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

2. Podstawiamy co wiemy:

alfa u nas to 135*

$$\sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ$$

3. Patrzymy do tabeli i odczytujemy wartość

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Odpowiedź

PRZYKŁAD 2

Chcemy obliczyć cos 120°

1. Korzystamy z tego wzoru:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

2. Podstawiamy co wiemy:

$$\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ$$

Pamiętaj o -. We wzorach redukcyjnych przy cosinusie pojawia się minus

3. Patrzymy do tabeli i odczytujemy wartość

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$-\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

4. Odpowiedź

PRZYKŁAD 3 - DO ZROBIENIA DLA CIEBIE

Chcemy obliczyć tg 150°

1. Korzystamy z tego wzoru:

$$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$$

2. Podstawiamy co wiemy:

3. Patrzymy do tabeli i odczytujemy wartość

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

4. Odpowiedź:

2 Wyjątkowe Trójkąty

CO JEST TAKIEGO WYJĄTKOWEGO W TYCH TRÓJKĄTACH?

Trójkąty o kątach (45°, 45°, 90°) i (30°, 60°, 90°) są wyjątkowe, ponieważ ich boki mają stałe, proste proporcje, dzięki czemu **łatwo można obliczyć długości boków, znając tylko jeden z nich** (w porównaniu w Pitagorasie, potrzebujemy długości dwóch boków)**.** Są to tzw. trójkąty szczególne, często wykorzystywane w zadaniach maturalnych, gdzie szybkie znalezienie proporcji boków jest przydatne.

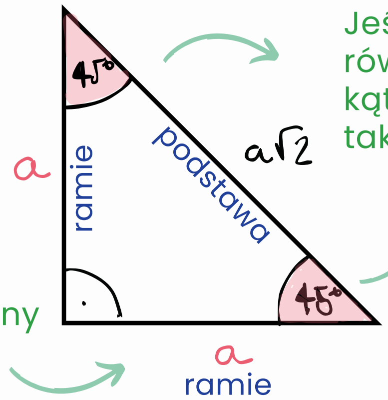
Jeśli dostaniesz zadanie, gdzie masz daną długość tylko jednego boku to wiedz co tu się święci - właśnie te trójkąty!

TRÓJKĄT 45 45 90

Pierwszym z wyjątkowych trójkątów to ten o kątach 45 45 90.
Oto jego zależności:

WŁASNOŚCI TEGO TRÓJKĄTA:

- równoramienny
- prostokątny
- kąty 45,45,90

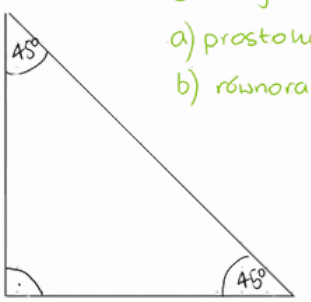


Jeśli trójkąt jest równoramienny to dwa kąty u podstawy mają taką samą miarę

Tutaj mamny bliźniaczki

PRZYKŁAD 1

Wiemy, że trójkąt jet prostokątny, równoramienny. A także, że przeciwprostokątna ma długość 8. Chcemy obliczyć pozostałe długości boków.



① wiemy że trójkąt jest
a) prostokątny $180° - 90° = 90°$
b) równoramienny $90° : 2 = 45°$
wiemy że trójkąt jest to 45° 45° 90°

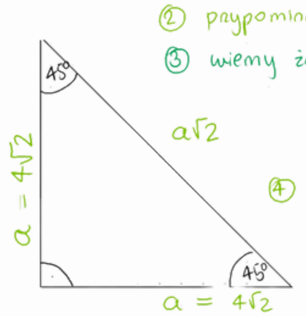
Dzielimy na dwa bo trójkąt jest równoramienny!

② przypominamy sobie zależności

③ wiemy że $a\sqrt{2} = 8$ chcemy obliczyć a

$a\sqrt{2} = 8 \quad / \cdot \sqrt{2}$
$2a = 8\sqrt{2} \quad /:2$
$a = 4\sqrt{2}$

④ uzupełniamy



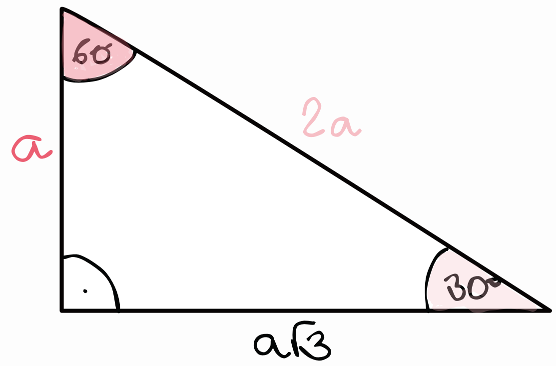
STUDENCKI TIP OD EMI
Jeśli zapomnisz tych zależności. Możesz wyliczyć brakujący bok korzystając z twierdzenia pitagorasa.

TRÓJKĄT 30 60 90

Drugi wyjątkowy trójkąt jest połową trójkąta równobocznego.
Występują w nim poniższe zależności.

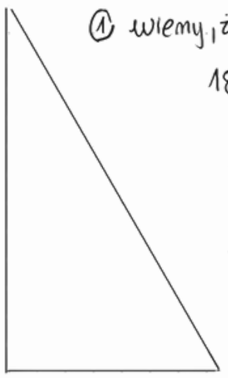
WŁASNOŚCI TEGO TRÓJKĄTA:

- połowa trójkąta równobocznego
- prostokątny
- kąty 30,60,90



PRZYKŁAD 2

Wiemy, że trójkąt jest prostokąty oraz kąty są w stosunku 1:2:3. A także, że przeciwprostokątna ma długość 6. Chcemy obliczyć pozostałe długości boków.



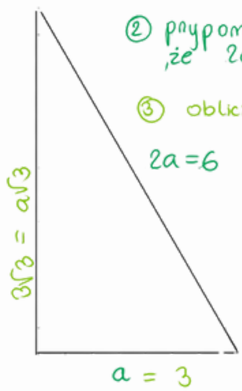
① wiemy, że stosunek boków trójkąta jest 3:2:1

$180° = 6x$

$3+2+1$

$x = 30°$
$2x = 60°$
$3x = 90°$

teraz wiemy że mamy trójkąt 90°, 60°, 30°



② przypominamy sobie zależności oraz odczytujemy, że $2a = 6$

③ obliczamy resztę boków

$2a = 6$

$2a = 6$
$a = 3$

$a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

STUDENCKI TIP OD EMI

Pamiętaj aby dobrze umiejscowić boki, zwłaszcza kiedy trójkąt będzie odwrócony.

PRZYKŁAD 3- DO ZROBIENIA DLA CIEBIE

Wiemy, że trójkąt jest prostokąty oraz dwa pozostałe kąty są takie same. A także, że przyprostokątna ma długość 3. Chcemy obliczyć pozostałe długości boków.

3 Twierdzenie cosinusów

TWIERDZENIE SINUSÓW- DEFINICJA

Twierdzenie cosinusów pozwala nam obliczyć brakujący trzeci bok trójkąta w sytuacji kiedy znamy długości pozostałych dwóch boków oraz miarę kąta między nimi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

PRZYKŁAD 1

Mamy trójkąt ABC |AB| = 2 |AC| = 5 a cos kąta między nimi wynosi 3/5. Chcemy obliczyć bok |BC|

1. Korzystamy z tego wzoru:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

2. Podstawiamy co wiemy:

$$|BC|^2 = 2^2 + 5^2 + 2\cdot 2\cdot 5\cdot \frac{3}{5}$$

3. Obliczamy

$$|BC|^2 = 4 + 25 + 12$$

$$|BC|^2 = 41$$

$$|BC| = \sqrt{41}$$

STUDENCKI TIP OD EMI
Wbrew pozorom jest to przydatne twierdzenie zwłaszcza przy zadaniach z działu stereometria

PRZYKŁAD 2: DO ZROBIENIA DLA CIEBIE

Mamy trójkąt ABC |AB| = 10 |BC| = 5√3 |AC| = 5. Oblicz cos kąta przy wierzchołku B

1. Korzystamy z tego wzoru:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

2. Rysunek pomocniczy:

3. Podstawiamy co wiemy i obliczamy

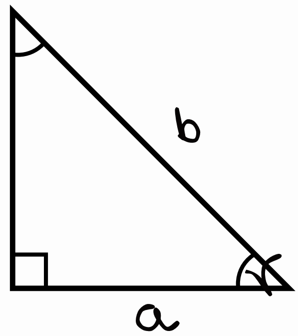
4 Pole trójkąta

Na pewno znasz ten wzór na pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2}ah$$

Co jeśli nie mamy wysokości lub wszystkich boków trójkąta? Istnieje praktyczny sposób, który umożliwia wyznaczenie pola trójkąta, gdy znamy długości dwóch jego boków oraz kąt między nimi.
Oto on:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$



Jak to działa?

PRZYKŁAD 1

Chcemy obliczyć pole trójkąta ABC wiedząc, że |AB| = 10, |BC| = 12 a kąt między nimi jest kątem prostym.

1.Korzystamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

2. Wyznaczamy sin 90°

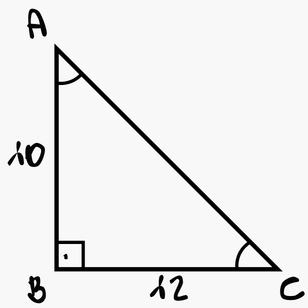
$$\sin 90^\circ = 1$$

3. Podstawiamy co wiemy i obliczamy

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot 1$$

$$P = 60$$

Odpowiedź



TU MATURA

PRZYKŁAD 2

Chcemy obliczyć pole trójkąta ABC wiedząc, że |AB| = 5, |BC| = 7 a kąt między ma miarę 30°.

1.Korzystamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

2. Wyznaczamy sin 30°

3. Podstawiamy co wiemy i obliczamy

PRZYKŁAD 3- DO OBLICZENIA DLA CIEBIE

Chcemy obliczyć pole trójkąta ABC wiedząc, że |AB| = 3, |BC| = 5 a kąt między ma miarę 45°.

1.Korzystamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

2. Wyznaczamy sin 45°

3. Podstawiamy co wiemy i obliczamy

STUDENCKI TIP OD NATI

Rysunki w zadaniach gdzie mamy figury geometryczne, długości boków, kąty to klucz do sukcesu!

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 1.

Kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{24}{25}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy

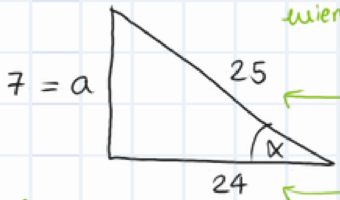
A. $\frac{7}{18}$ **B.** $\frac{7}{24}$ **C.** $\frac{7}{25}$ **D.** $\frac{18}{25}$

SPOSÓB 1

① rysujemy trójkąt pomocniczy i z $\cos x = \frac{24}{25}$ wiemy, że

$c = 25$

$b = 24$



② z t. Pitagorasa obliczamy bok a

$$a^2 + 24^2 = 25^2$$
$$a^2 + 576 = 625$$
$$a^2 = 49$$
$$a = 7$$

③ obliczamy tg x

$$\operatorname{tg} x = \frac{7}{24}$$

SPOSÓB 2

① korzystamy ze wzoru $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\left(\frac{24}{25}\right)^2 + \sin^2 x = 1$$

$$1 - \frac{576}{625} = \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{49}{625} = \frac{7}{25}$$

② korzystamy ze wzoru $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{25} \cdot \frac{25}{24} = \underline{\underline{\frac{7}{24}}}$$

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 2.

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$ jest równe

A. $\cos^3\alpha$ **B.** $\sin^2\alpha$ **C.** $1 - \sin^2\alpha$ **D.** $\cos\alpha$

① wyciągamy cos α przed nawias

$$\cos\alpha(1 - \sin\alpha^2)$$

② korzystamy z $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\cos\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

③ sinusy nam znikają

$$\cos\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

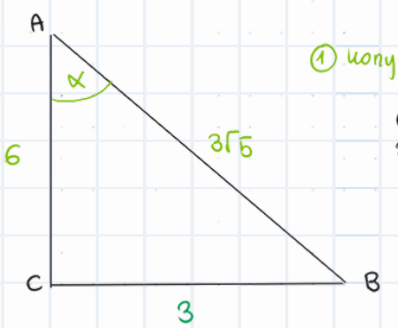
④ wynik ostateczny

$$\cos^3\alpha$$

Zadanie 3.

Przyprostokątna AC trójkąta prostokątnego ABC ma długość 6, a przeciwprostokątna AB ma długość $3\sqrt{5}$. Wtedy tangens kąta ostrego CAB tego trójkąta jest równy

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2



① korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$6^2 + |CB|^2 = (3\sqrt{5})^2$$
$$36 + |CB|^2 = 45$$
$$|CB|^2 = 9$$
$$|CB| = 3$$

② obliczamy tgα

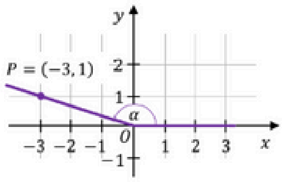
$$tg\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Przykłady zadań maturalnych

Jeśli potrzebujesz więcej przykładów, możesz zapisać się na nasze laby :)

Zadanie 4.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono kąt α o wierzchołku w punkcie $O = (0, 0)$. Jedno z ramion tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią Ox, a drugie przechodzi przez punkt $P = (-3, 1)$ (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy

A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$
B. $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
C. $\left(-\frac{3}{1}\right)$
D. $\left(-\frac{1}{3}\right)$

① wyznaczamy x i y

$x = -3$

$y = 1$

② korzystamy ze wzoru $tg\,x = \frac{y}{x}$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{3}$

Zadanie 5.

Liczba $\sin^3 20^\circ + \cos^2 20^\circ \cdot \sin 20^\circ$ jest równa

A. $\cos 20^\circ$
B. $\sin 20^\circ$
C. $\text{tg}\, 20^\circ$
D. $\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ$

① wyciągamy sin 20° przed nawias

$$\sin 20^\circ \, \underbrace{(\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ)}_{1}$$

$$\sin 20^\circ \cdot 1 = \underline{\sin 20^\circ}$$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

STUDENCKI TIP OD NATI

Potrzebujesz pomocy w rozwiązaniu zadań?
Zapraszamy na naszego Discorda.
Z chęcią pomożemy!

Materiały możesz też wydrukować

Zadanie 1.

Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Zadanie 2.

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Sinus kąta α jest równy

A. $\frac{24}{49}$ **B.** $\frac{5}{7}$ **C.** $\frac{25}{49}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}}{7}$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 3.

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ jest równe

A. $\sin^2\alpha$

B. $\sin^6\alpha \cdot \cos^2\alpha$

C. $\sin^4\alpha + 1$

D. $\sin^2\alpha \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha)$

Zadanie 4.

W rombie o boku długości $6\sqrt{2}$ kąt rozwarty ma miarę $150°$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn długości przekątnych tego rombu jest równy

A. 24 **B.** 72 **C.** 36 **D.** $36\sqrt{2}$

Twoja kolej, czyli zadanka z CKE

Zadanie 5.

Kąt α jest ostry oraz $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{64}{9}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ jest równa

A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{64}{9}$ **D.** $\frac{9}{64}$

Zadanie 6.

Nie istnieje kąt ostry α taki, że

A. $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ i $\cos\alpha=\frac{2}{3}$

B. $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ i $\cos\alpha=\frac{12}{13}$

C. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ i $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

D. $\sin\alpha=\frac{9}{15}$ i $\cos\alpha=\frac{12}{15}$

wspieramy po STUDENTCKU

praktyka

nauka

przedsiębiorczość

inicjatywa

Dziękujemy za wspólną naukę. Mamy nadzieję, że zdobywanie wiedzy było dla Ciebie przyjemne. Do zobaczenia na studiach!

Powodzenia!

ŚLEDŹ DALEJ!

TU MATURA

www.tumatura.pl

@tuMATURA

@tumatura

FUNDACJA KANAŁ STUDENCKI

I DOŁĄCZ DO STUDENCKIEJ SPOŁECZNOŚCI!

@kanalstudencki

@kanal.studencki

www.kanalstudencki.pl

kontakt@kanalstudencki.pl